2023年上半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力试题(高级中学)

注意事项:

1. 考试时间为120分钟,满分为150分。
2. 请按照规定在答题卡上填涂、作答。在试卷上作答无效,不予评分。

一、单项选择题(本大题共8小题,每小题5分,共40分)

1. 已知$g(x)$在$[0,+\infty)$上可导,且$g(1)=1$,若$f(x)=(x^{\alpha}-1)g(x)$,$\alpha>1$,则导数$f'(1)$的值是(　　)。

A. 0　　B. 1

C. α　　D. 2α

视频讲解

2. 点$x=0$是函数$y=e^{\frac{1}{x}}$的(　　)。

A. 连续点　　B. 可去间断点

C. 跳跃间断点　　D. 第二类间断点

视频讲解

3. 设$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$是$n$维向量,$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$是内积,$|\boldsymbol{\alpha}|$是向量$\boldsymbol{\alpha}$的模长,则(　　)。

A. $|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})|<|\boldsymbol{\alpha}|\cdot|\boldsymbol{\beta}|$　　B. $|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})|\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\cdot|\boldsymbol{\beta}|$

C. $|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})|>|\boldsymbol{\alpha}|\cdot|\boldsymbol{\beta}|$　　D. $|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})|\geqslant|\boldsymbol{\alpha}|\cdot|\boldsymbol{\beta}|$

视频讲解

4. 对于任意$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$,若$T\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,0,\cdots,0)\in\mathbf{R}^n$,则$T$是(　　)。

A. 投影变换

B. 对称变换

C. 旋转变换

D. 正交变换

视频讲解

5. 过点$M_1(3,-2,1)$,$M_2(-1,0,2)$的直线方程是(　　)。

A. $4(x-3)-2(y+2)-(z-1)=0$　　B. $4(x+1)-2y-(z-2)=0$

C. $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$　　D. $\dfrac{x+1}{-4}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+2}{-1}$

视频讲解

6. 甲、乙两人独立地对同一目标进行射击,其命中率分别为0.4和0.5,则目标被射中的概率是(　　)。

A. 0.6　　B. 0.7

C. 0.8　　D. 0.9

视频讲解

7. 普通高中数学课程标准突出的四条内容主线是(　　)。

A. 函数、几何与代数、概率与统计、数学建模活动与数学探究活动

B. 函数、图形与几何、概率与统计、数学建模活动与数学探究活动

C. 代数、图形与几何、概率与统计、数学建模活动与数学探究活动

视频讲解

D. 代数、函数、图形与几何、概率与统计

8. 下面不适合作为指数函数模型教学的是(　　)。

A. 种群增长问题　　B. 放射物衰减问题

C. 复利问题　　D. 自由落体问题



视频讲解

二、简答题(本大题共 5 小题,每小题 7 分,共 35 分)

9. 设 h 为常数,讨论 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=z,\\ z=h\end{cases}$ 在空间直角坐标系中所表示的曲线类型。



视频讲解

10. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(3,2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(3,1,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(8,8,6)^{\mathrm{T}}$。

(1) 证明:向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是三维空间的一组基;(4 分)

(2) 求向量 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 在基底 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标。(3 分)



视频讲解

11. 设二维随机变量 (X,Y) 服从集合 $\{(n,m)\mid -2\leqslant n\leqslant 2,-2\leqslant m\leqslant 2\}$ 上的均匀分布,其中 n,m 都是整数。

(1) 求随机变量 X 的概率分布;(3 分)

(2) 令 $Z=\min\{X,Y\}$,求随机变量 Z 的概率分布。(4 分)



视频讲解

12. 简述长方体模型在学习直线与直线、直线与平面、平面与平面的平行和垂直位置关系中的作用(答出两条即可)。



视频讲解

13. 数学教学中要注意知识的关联性和整体性，请写出高中数学中与“函数单调性”密切相关的具体知识（答出 5 条即可）。

视频讲解

三、解答题（本大题 1 小题，10 分）

14. 证明：函数 $f(x)=x+\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续。

视频讲解

四、论述题（本大题 1 小题，15 分）

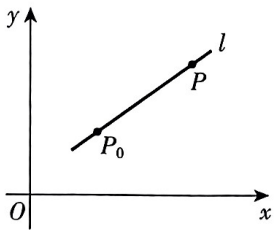
15. 写出对数的概念和三条运算性质，并结合对数的运算性质谈谈你对于加法运算与乘法运算互相转化的认识。

视频讲解

五、案例分析题（本大题 1 小题，20 分）

16. 案例：下面是某教师关于“建立直线的点斜式方程”的教学片段。

教师：如图直线 l 经过点 $P_0(x_0,y_0)$，且斜率为 k，设 $P(x,y)$ 是直线 l 上不同于 P_0 的任意一点，如何由 $P_0(x_0,y_0)$，$P(x,y)$ 两点的坐标表示直线的斜率呢？



学生甲：因为直线 l 经过 $P_0(x_0,y_0)$，$P(x,y)$ 两点，由过两点的直线的斜率公式得 $k=\dfrac{y-y_0}{x-x_0}$，我认为这就是直线 l 的方程。

……

教师：直线 l 上每个点的坐标 (x,y) 都满足关系式 $y-y_0=k(x-x_0)$ 吗？坐标满足关系式 $y-y_0=k(x-x_0)$ 的每一个点都在直线 l 上吗？

学生乙：由前面的求解过程就可以看出，直线 l 上每个点的坐标 (x,y) 都满足关系式 $y-y_0=k(x-x_0)$；坐标满足关系式 $y-y_0=k(x-x_0)$ 的每一个点显然也都在直线 l 上。

……

问题：

（1）学生甲的回答正确吗？为什么？（8 分）

（2）学生乙的回答不严谨，请说明理由并完善。（12 分）



视频讲解

六、教学设计题（本大题 1 小题，30 分）

17. 阅读材料，完成问题。

余弦定理

我们知道，两边和它们的夹角分别相等的两个三角形全等。这说明，给定两边及其夹角的三角形是唯一确定的。也就是说，三角形的其他边、角都可以用这两边及其夹角来表示。那么，表示的公式是什么？

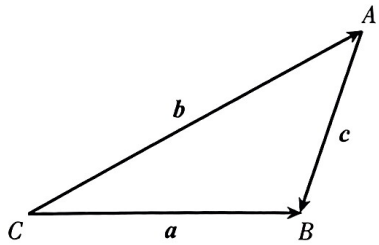
探究

在 $\triangle ABC$ 中，三个角 A,B,C 所对的边分别是 a,b,c，怎样用 a,b 和 C 表示 c 呢？

因为涉及的是三角形的两边长和它们的夹角，所以我们考虑用向量的数量积来探究。

如图，设 $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，那么

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}。①$$



我们的研究目标是用 $|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$ 和 C 表示 $|\boldsymbol{c}|$，联想到数量积的性质 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{c}|^2$，可以考虑用向量 $\boldsymbol{c}$（即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$）与其自身作数量积运算。

由 ① 得

……

根据上面的内容，完成下列任务：

（1）根据上述材料，写出用向量方法证明余弦定理的过程；（10 分）

（2）设计“余弦定理”这节课的教学目标，并确定教学重点；（8 分）



视频讲解

（3）针对上述材料中“探究”的问题，设计 3 个课堂提问，引导学生从三角形的边角关系入手，逐步探索用向量方法证明余弦定理，并说明设计意图。（12 分）

2022年下半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力试题(高级中学)

一、单项选择题(本大题共8小题,每小题5分,共40分)

1. 极限$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x^2-1}$的值是(　　)。



视频讲解

A. -1　　B. $-\dfrac{1}{2}$

C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 1

2. 函数$f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$的间断点有(　　)。



视频讲解

A. 0个　　B. 1个

C. 2个　　D. 无穷多个

3. 曲线$y=2x+e^x$在点$(0,1)$处的切线方程是(　　)。



视频讲解

A. $y=2x-1$　　B. $y=2x+1$

C. $y=3x-1$　　D. $y=3x+1$

4. 矩阵$\begin{bmatrix}1&0&1&-1\\0&1&2&3\\1&0&3&-1\\-2&0&-2&2\end{bmatrix}$的秩是(　　)。



视频讲解

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

5. 已知$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$是非零向量,则"$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=0$"是"$\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$"的(　　)。



视频讲解

A. 充分不必要条件　　B. 充要条件

C. 必要不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 将一枚质地均匀的硬币抛掷4次,其中有2次正面朝上的概率是(　　)。



视频讲解

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{3}{8}$

C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{3}{4}$

7. "文华逾九章,拓扑公式彪史册;俊杰胜十书,机器证明誉寰球。"是对一位著名数学家成就的高度概括,这位数学家是(　　)。



视频讲解

A. 吴文俊　　B. 苏步青

C. 祖冲之　　D. 李善兰

8.《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》提出的数学学科核心素养不包括(　　)。



视频讲解

A. 数学建模　　B. 数学文化

C. 数据分析　　D. 数学运算

二、简答题(本大题共 5 小题,每小题 7 分,共 35 分)

9. 已知由方程 $e^x + xy - e^y = 1 - e$ 所确定的隐函数为 $y(x)$,求 $y'(0)$。



视频讲解

10. 已知两点 $M_1(1, -2, 3)$,$M_2(3, 0, -1)$,求垂直且平分线段 M_1M_2 的平面方程。



视频讲解

11. 甲、乙两个工厂为某公司生产一批产品,次品率分别为 2%,1%。已知甲、乙两个工厂生产的产品分别占这批产品总数的 40%,60%,公司质检员从中任意抽取一件产品。

(1) 求这件产品是次品的概率;(5 分)

(2) 若这件产品是次品,求该产品出自甲工厂的概率。(2 分)



视频讲解

12. 分类是一种重要的数学思想方法，简述分类的原则和学习分类的意义。


视频讲解

13. 结合抛掷硬币的试验，简述概率和频率的区别与联系。


视频讲解

三、解答题（本大题 1 小题，10 分）

14. 求线性方程组$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$的通解。


视频讲解

四、论述题(本大题 1 小题,15 分)

15. “几何与代数”是高中数学必修课程内容中的一个主题,该主题的内容包括立体几何、平面解析几何、平面向量、空间向量、复数,试论述:

(1) 将“几何与代数”整体设计为一个主题的缘由;(6 分)

(2) 复数与平面向量之间的关系。(9 分)



视频讲解

五、案例分析题(本大题 1 小题,20 分) 阅读案例,并回答问题。

16. 案例:

某习题课上有这样一道习题,求函数 $y=\ln(x+1)+\ln(x-3)$ 的单调递增区间。

某同学的解法如下:

函数 $y=\ln(x+1)+\ln(x-3)=\ln(x^2-2x-3)$,由于 $y=\ln t$ 是增函数,所以只需求 $t=x^2-2x-3$ 的单调性,因为 $t=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$,易见该二次函数的单调递增区间为 $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$。所以函数 $y=\ln(x+1)+\ln(x-3)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$。

问题:

(1) 指出这名学生在求解过程中的错误,并叙述理由;(8 分)

(2) 给出上述题目的正确解答过程。(12 分)



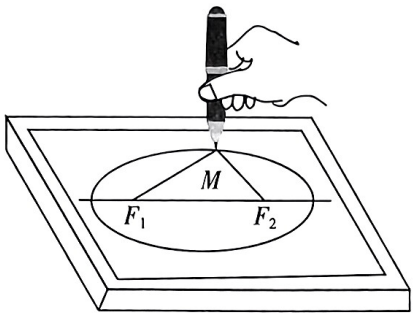
视频讲解

六、教学设计题(本大题 1 小题,30 分)

17.(材料)下面是某高中数学教材“椭圆及其标准方程”一节的内容片段:

探究

取一条定长的细绳,把它的两端都固定在图板的同一点,套上铅笔,拉紧绳子,移动笔尖,这时笔尖(动点)画出的轨迹是一个圆。如果把细绳的两端拉开一段距离,分别固定在图板的两点 F_1,F_2(如图所示),套上铅笔,拉紧绳子,移动笔尖,画出的轨迹是什么曲线?



在这一过程中,移动的笔尖(动点)满足的几何条件是什么?

把细绳的两端拉开一段距离,移动笔尖的过程中,细绳的长度保持不变,即笔尖到两个定点的距离的和等于常数。

我们把平面内与两个定点 F_1,F_2 的距离的和等于常数(大于 $|F_1F_2|$)的点的轨迹叫作椭圆(ellipse)。这两个定点叫作椭圆的焦点,两焦点间的距离叫作椭圆的焦距。

由椭圆的定义可知,上述移动的笔尖(动点)画出的轨迹是椭圆。

下面我们根据椭圆的几何特征,选择适当的坐标系,建立椭圆的方程。

根据上面的内容,完成下列任务:

(1)写出椭圆标准方程的推导过程(设椭圆的焦距为 $2c$,绳长为 $2a$,焦点在 x 轴上);(10 分)

(2)根据材料设计这部分内容的教学设计,包括教学目标、教学重点、教学过程(含引导学生研究的活动和设计意图)。(20 分)



视频讲解

2022年上半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力试题(高级中学)

注意事项:

1. 考试时间为120分钟,满分为150分。
2. 请按规定在答题卡上填涂、作答。在试卷上作答无效,不予评分。

一、单项选择题(本大题共8小题,每小题5分,共40分)

1. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}$的值为(　　)。



视频讲解

A. 0　　B. 1

C. e　　D. ∞

2. 已知向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$,且$|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=2$,若$\boldsymbol{m}=\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$互相垂直,则$\lambda$的值为(　　)。



视频讲解

A. -2　　B. -1

C. 1　　D. 2

3. 设$f(x)$与$g(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的增函数,下列结论一定正确的是(　　)。



视频讲解

A. $f(x)+g(x)$是增函数　　B. $f(x)-g(x)$是增函数

C. $f(x)g(x)$是减函数　　D. $f(g(x))$是减函数

4. 设$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$为n阶方阵,下列结论一定正确的是(　　)。



视频讲解

A. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$　　B. $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$

C. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$　　D. $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$

5. 甲、乙两位同学分别参加不同公司的面试,甲同学被选中的概率是$\frac{1}{7}$,乙同学被选中的概率是$\frac{1}{5}$,则两位同学中至少有一位被选中的概率是(　　)。



视频讲解

A. $\frac{1}{7}$　　B. $\frac{2}{7}$

C. $\frac{11}{35}$　　D. $\frac{12}{35}$

6. 若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,\lambda,2)$线性相关,则$\lambda$的值为(　　)。



视频讲解

A. -1　　B. 0

C. 1　　D. 2

7. 下列语句是命题的是(　　)。

①$2x < 1$

②$x - 3$ 是整数

③ 存在一个 $x \in \mathbf{Z}$,使 $2x - 1 = 5$

④ 对任意一个无理数 x,x^2 也是无理数

A. ①②　　B. ①③

C. ②③　　D. ③④



视频讲解

8. 下列属于中国古代数学成就的是(　　)。

① 勾股定理　　② 对数

③ 割圆术　　④ 更相减损术

A. ①②③　　B. ①②④

C. ①③④　　D. ②③④



视频讲解

二、简答题(本大题共 5 小题,每小题 7 分,共 35 分)

9. 已知函数 $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1$,求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值。



视频讲解

10. 求过直线 $l_1: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-3}{-1}$ 且平行于直线 $l_2: \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{1}$ 的平面方程。



视频讲解

11. 已知某班级 80% 的女生和 90% 的男生选修滑冰,且该班中 60% 的学生是女生。

(1) 从该班随机选取一名学生,求这名学生选修滑冰的概率;(3 分)

(2) 从该班选修滑冰的学生中随机选取一名学生,求这名学生是女生的概率。(4 分)



视频讲解

12. 简述研究椭圆几何性质的两种方法。

视频讲解

13. 简述在教材平面解析几何内容中设置下列习题的设计意图(答出两条即可)。

已知 $0 < x < 1, 0 < y < 1$,求证不等式

$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \geqslant 2\sqrt{2}$,并说明其几何意义。

视频讲解

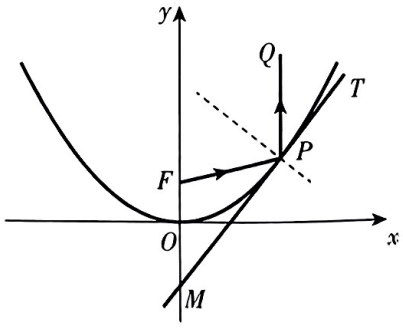
三、解答题(本大题 1 小题,10 分)

14. 已知抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$。

(1) 求抛物线在点(2,1) 处的切线方程;(5 分)

(2) 如图,抛物线在点 $P(x_0, y_0)(x_0 \neq 0)$ 处的切线 PT 与 y 轴交于点 M,点光源放在抛物线焦点 $F(0,1)$ 处,入射光线 FP 经抛物线反射后的光线为 PQ,即 $\angle FPM = \angle QPT$,求证:光线 PQ 与 y 轴平行。(5 分)

视频讲解



四、论述题(本大题 1 小题,15 分)

15. 论述数学史在导数概念教学各阶段(导入、形成、应用)的作用。



视频讲解

五、案例分析题(本大题 1 小题,20 分)阅读案例,并回答问题。

16. 案例:

下面是甲、乙两位教师的教学片段。

【教师甲】

教师甲:在平面直角坐标系中,点(x,y)关于y轴的对称点是什么?

学生 1:$(-x,y)$。

教师甲:为了研究函数的对称性,请大家填写下表,观察给定函数的自变量x互为相反数时,对应的函数值之间具有什么关系?

x	-3	-2	-1	1	2	3
$f(x)=x^2$						
$g(x)=\|x\|$						

学生 2:通过计算发现,自变量互为相反数时,对应的函数值相等,可以用解析式证明,$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$,$g(-x)=|-x|=|x|=g(x)$。

教师甲:通常我们把具有上述特征的函数称为偶函数,请大家试着给出偶函数的定义。

【教师乙】

教师乙:我们已经研究了函数的单调性,并且用符号语言精确地描述了函数的单调性,今天我们研究函数的其他性质,请大家画出函数$f(x)=x^2$和$g(x)=|x|$的图像,并观察它们的共同特征。(通过观察,学生发现这两个函数的图像都关于y轴对称)

教师乙:类比函数的单调性,你能用符号语言精确地描述“函数图像关于y轴对称”这一特征吗?(通过观察,学生发现$f(-x)=f(x)$)

教师乙:通常我们把具有上述特征的函数称为偶函数,请大家试着给出偶函数的定义。

问题：

（1）写出偶函数的定义，并简要说明研究函数奇偶性的作用；（10 分）

（2）对甲、乙两位教师的教学分别给予评价。（10 分）

视频讲解

六、教学设计题（本大题 1 小题，30 分）

17. 材料：

下面是高一下学期教材“空间中直线与平面之间的位置关系”的部分内容。

2. 空间中直线与平面的位置关系

在图 8.4－11 中，直线 AB 与平面 $ABCD$ 有无数个公共点；直线 AA' 与平面 $ABCD$ 只有一个公共点 A；直线 $A'B'$ 与平面 $ABCD$ 没有公共点。再结合生活实例，我们可以看出，直线与平面的位置关系有且只有三种：

（1）**直线在平面内** —— 有无数个公共点；

（2）**直线与平面相交** —— 有且只有一个公共点；

（3）**直线与平面平行** —— 没有公共点。

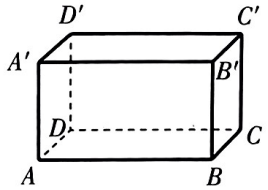


图 8.4-11

当直线与平面相交或平行时，直线不在平面内，也称为直线在平面外。

根据上面的内容，完成下列任务：

（1）画出直线与平面三种位置关系的示意图，并举出生活中体现这三种位置关系的实例；（12 分）

（2）写出这部分内容的教学设计，包括教学目标、教学重点、教学过程（含引导学生探究的活动和设计意图）。（18 分）

视频讲解

2021年下半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力试题(高级中学)

注意事项:

1. 考试时间为120分钟,满分为150分。
2. 请按规定在答题卡上填涂、作答。在试卷上作答无效,不予评分。

一、单项选择题(本大题共8小题,每小题5分,共40分)

1. 矩阵$\begin{bmatrix}1&2&3&1\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\1&3&5&4\end{bmatrix}$的秩是(　　)。



视频讲解

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

2. 已知$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$,则$\boldsymbol{a}\cdot(-3\boldsymbol{b})$的值是(　　)。



视频讲解

A. -39　　B. -13

C. 13　　D. 39

3. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)^2\sin\dfrac{1}{2n^2}$的值是(　　)。



视频讲解

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. ∞

4. 已知曲线$y=\int_0^x e^{t^2}dt$的一条切线与直线$x+y-3=0$垂直,则该切线的方程是(　　)。



视频讲解

A. $y=-x$　　B. $y=x$

C. $y=-x+e$　　D. $y=x+e$

5. 在空间直角坐标系中,将椭圆$\begin{cases}x^2+\dfrac{z^2}{9}=1,\\y=0\end{cases}$绕$z$轴旋转一周,所得旋转曲面的方程是(　　)。



视频讲解

A. $x^2+y^2+\dfrac{z^2}{9}=1$　　B. $x^2-y^2+\dfrac{z^2}{9}=1$

C. $\dfrac{x^2}{9}-y^2+\dfrac{z^2}{9}=1$　　D. $x^2+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{9}=1$

6. 已知属于不同特征值的特征向量线性无关，若 λ_1,λ_2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值，所对应的特征向量分别是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$，则向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$ 线性无关的充要条件是(　　)。

视频讲解

A. $\lambda_1 \neq 0$　　B. $\lambda_2 \neq 0$

C. $\lambda_1 = 0$　　D. $\lambda_2 = 0$

7. 第十四届国际数学教育大会(ICME－14)于2021年7月在中国上海举行，ICME－14的会标如图所示，其中没有涉及的数学元素是(　　)。



视频讲解

A. 旋转变换　　B. 勾股弦图

C. 杨辉三角图　　D. 数字进位制

8. 高中数学中的周期函数是(　　)。

视频讲解

A. 反三角函数　　B. 三角函数

C. 对数函数　　D. 指数函数

二、简答题(本大题共5小题，每小题7分，共35分)

9. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,k)^{\mathrm{T}}$，且行列式 $A=\begin{vmatrix}1&2&2\\1&3&1\\2&1&k\end{vmatrix}$。

(1) 若行列式 $A=0$，求 k 的值；(3分)

(2) 当行列式 $A=0$ 时，将 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 的线性组合。(4分)

视频讲解

10. 求曲线 $y = \arctan x$ 与直线 $y = x, x = 2$ 所围成的平面区域的面积。



视频讲解

11. 甲、乙两人进行射击比赛，各射击 3 次，击中目标次数多者获胜，假设他们每次击中目标的概率均为 $\frac{1}{2}$，且每次是否击中目标是相互独立的。

(1) 求乙在 3 次射击中恰好击中 1 次目标的概率；(3 分)

(2) 已知甲在 3 次射击中恰好击中 2 次目标，求甲获胜的概率。(4 分)



视频讲解

12. 学生能获得进一步学习以及未来发展所必需的“四基”和“四能”是普通高中数学课程的目标之一，请回答“四基”和“四能”分别是什么。



视频讲解

13. 结合实例，简述什么是简单随机抽样和分层抽样。



视频讲解

三、解答题（本大题 1 小题，10 分）

14. 已知函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$a<c<d<b$，$f(c)+f(d)=k$，证明：至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$2f(\xi)=k$。



视频讲解

四、论述题（本大题 1 小题，15 分）

15. 函数是中学数学的重要内容，回答下列问题：

（1）写出高中阶段函数的定义；（7 分）

（2）阐述高中阶段函数的定义与初中阶段函数的定义的相同点和不同点。（8 分）



视频讲解

五、案例分析题(本大题 1 小题,20 分) 阅读案例,并回答问题。

16.(材料) 案例:

在学习了同角三角函数的基本关系后,老师给学生布置了一道题目。已知 $\sin\alpha - \cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$,$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$,求 $\tan\alpha$ 的值。一名学生的求解过程如下:

解:依题意和同角三角函数的基本关系,得$\begin{cases}\sin\alpha - \cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}, & ①\\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,\end{cases}$

消去 $\sin\alpha$,得 $5\cos^2\alpha - \sqrt{5}\cos\alpha - 2 = 0$,②

进而得 $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ 或 $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$,③

因为 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$,④

所以 $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 或 $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,⑤

所以 $\tan\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}$ 或 $\tan\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -2$,⑥

因为 $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$,⑦

所以 $\tan\alpha = \frac{1}{2}$。⑧

根据以上材料回答下列问题:

(1) 指出这名学生在求解过程中的错误;(6 分)

(2) 给出上述题目的正确解答过程;(6 分)

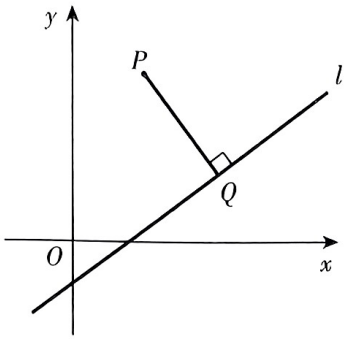
(3) 根据此题的错误之处,分析这名学生在运算和逻辑推理方面的不足。(8 分)


视频讲解

六、教学设计题(本大题 1 小题,30 分)

17.(材料)下面是某高中数学教材“点到直线的距离公式”一节的内容片段:

探究:如图,已知点 $P(x_0,y_0)$,直线 $l:Ax+By+C=0$,如何求点 P 到直线 l 的距离?



点 P 到直线 l 的距离,就是从点 P 到直线 l 的垂线段 PQ 的长度,其中 Q 是垂足。因此,求出垂足 Q 的坐标,利用两点间的距离公式求出 $|PQ|$,就可以得到点 P 到直线 l 的距离。

设 $A\neq 0,B\neq 0$,由 $PQ\perp l$,以及直线 l 的斜率为 $-\dfrac{A}{B}$,可得 l 的垂线 PQ 的斜率为 $\dfrac{B}{A}$,因此,垂线 PQ 的方程为 $y-y_0=\dfrac{B}{A}(x-x_0)$,即 $Bx-Ay=Bx_0-Ay_0$。

解方程组

$$\begin{cases}Ax+By+C=0,\\ Bx-Ay=Bx_0-Ay_0,\end{cases}$$

得直线 l 与 PQ 的交点坐标,即垂足 Q 的坐标为:

……

根据以上内容,完成下列任务:

(1)补充“点到直线的距离公式”的推导过程;(10 分)

(2)设计这部分内容的教学目标;(8 分)

(3)根据材料设计这部分内容的教学过程(含课堂导入、公式推导、巩固提高、课堂小结及设计意图)。(12 分)

视频讲解

2021年上半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力试题(高级中学)

注意事项:

1. 考试时间为120分钟,满分为150分。
2. 请按规定在答题卡上填涂、作答。在试卷上作答无效,不予评分。

一、单项选择题(本大题共8小题,每小题5分,共40分)

1. 在空间直角坐标系中,直线$\frac{x-2}{1}=\frac{y-11}{2}=\frac{z+1}{-1}$与平面$3x-2y-z+5=0$的位置关系是(　　)。



视频讲解

A. 相交且垂直　　B. 相交不垂直

C. 平行　　D. 直线在平面上

2. 下列选项中,使得函数$f(x)=\frac{1}{1-x}$一致连续的x的取值范围是(　　)。



视频讲解

A. $\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{3}{2},3\right]$　　B. $(-\infty,1)$

C. $(1,+\infty)$　　D. $(-\infty,+\infty)$

3. 方程$x^4-3x^3+6x-4=0$的整数解的个数是(　　)。



视频讲解

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

4. 设函数$y=f(x)$在x_0的自变量的改变量为Δx,相应的函数改变量为Δy,$o(\Delta x)$表示Δx的高阶无穷小。若函数$y=f(x)$在x_0可微,则下列表述不正确的是(　　)。



视频讲解

A. $\mathrm{d}y=f'(x_0)\mathrm{d}x$　　B. $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$

C. $\Delta y=f'(x_0)\mathrm{d}x$　　D. $\Delta y=\mathrm{d}y+o(\Delta x)$

5. 抛掷两粒正方体骰子(每个面上的点数分别为1,2,…,6),假定每个面朝上的可能性相同,观察向上面的点数,则点数之和等于5的概率为(　　)。



视频讲解

A. $\frac{5}{36}$　　B. $\frac{1}{9}$

C. $\frac{1}{12}$　　D. $\frac{1}{18}$

6. 对于$m\times n$矩阵$\boldsymbol{A}$,存在$n\times s$矩阵$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O})$,使得$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$成立的充要条件是矩阵$\boldsymbol{A}$的秩$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$满足(　　)。



视频讲解

A. $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leqslant n$　　B. $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<n$

C. $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\geqslant n$　　D. $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})>n$

7.《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》中明确提出的数学核心素养不包括(　　)。



视频讲解

A. 数据分析　　B. 直观想象

C. 数学抽象　　D. 合情推理

8. 下列函数:$f(x)=\pi^x$,$g(x)=e^x-\ln x^2$,$h(x)=x^\pi+\tan x$,$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数},\\ -1, & x\text{为无理数}。\end{cases}$其中初等函数的个数是(　　)。



视频讲解

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

二、简答题(本大题共 5 小题,每小题 7 分,共 35 分)

9. 已知三维空间中的 A,B 两点,其距离为 $2c$,求到 A,B 两点距离之和等于 $2a(0<c<a)$ 的点围成的立体图形的体积。



视频讲解

10. 设顾客在某银行窗口等待服务的时间 $X(\min)$ 的概率密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}。\end{cases}$用变量 Y 表示顾客对银行服务质量的评价值,若顾客等待时间不超过 5 min,则评价值 $Y=1$;否则,评价值 $Y=-1$,即 $Y=\begin{cases}1, & X\leqslant 5,\\ -1, & X>5。\end{cases}$

求:(1)X 的分布函数;(4 分)

(2)Y 的分布律。(3 分)



视频讲解

11. 已知方程组$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$①有唯一解当且仅当行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$②不等于零。请回答下列问题。

（1）行列式②的几何意义是什么？（3分）

（2）上述结论的几何意义是什么？（4分）


视频讲解

12. 数学课堂教学过程中，为了鼓励学生独立思考、深入理解问题，教师常常在呈现任务后，不是立刻讲解，而是留给学生足够的思考时间，这种教学方式可称之为“课堂留白”，请谈谈课堂留白的必要性及意义。


视频讲解

13. 给出指数函数模型的两个实际背景，分别写出其对应的函数解析式，并简述指数函数模型的特点。


视频讲解

三、解答题(本大题 1 小题,10 分)

14. 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 5x_4 = -6, \\ x_2 - x_3 - 2x_4 = -2, \\ 2x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 12x_4 = -14, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 + ax_4 = -8。 \end{cases}$$

(1)a 为何值时,其对应的齐次线性方程组的解空间的维数为 2?(5 分)

(2) 对于(1) 中确定的 a 的值,求该非齐次线性方程组的通解。(5 分)



视频讲解

四、论述题(本大题 1 小题,15 分)

15. 数学运算能力是中学数学教学需要培养的基本能力。学生的数学运算能力具体表现为哪些方面?请以平面向量运算为例予以说明。



视频讲解

五、案例分析题(本大题 1 小题,20 分) 阅读案例,并回答问题。

16. 案例:

在学习了“基本不等式”后,教师要求学生解决如下问题:

设 x,y 均为正数,且满足 $x+2y=1$,求 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值。

一位学生给出的解法如下:

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}\geqslant\frac{2}{\sqrt{xy}}$①,

又由 $x+2y=1$,

得 $2\sqrt{2xy}\leqslant x+2y=1$②,

由②得,$\sqrt{xy}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2}}$③,

结合①③得,$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant\frac{2}{\sqrt{xy}}\geqslant 2\times 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$,

从而 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$。

问题:

(1) 指出上述解答的错误之处,分析错误原因,并给出正确解法;(10 分)

(2) 简述求二元函数最值的一般解法有哪些。(10 分)



视频讲解

六、教学设计题(本大题 1 小题,30 分)

17. “等比数列前 n 项和公式”是普通高中数学教学的重要内容,请完成下列任务。

(1) 设计一组问题,说明学习“等比数列前 n 项和公式”的重要性;(10 分)

(2) 写出等比数列前 n 项和公式,并给出两种不同的推导方法;(10 分)

(3) 针对(2) 中的一种推导方法写出教学过程。(10 分)



视频讲解

2020年下半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力试题(高级中学)

注意事项:

1. 考试时间为120分钟,满分为150分。
2. 请按规定在答题卡上填涂、作答。在试卷上作答无效,不予评分。

一、单项选择题(本大题共8小题,每小题5分,共40分)

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{\frac{3}{2}}\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$ 的值为(　　)。



视频讲解

A. 0　　B. 1

C. ∞　　D. 不存在

2. 空间曲面 $xyz=1$ 被平面 $x=1$ 截得的曲线是(　　)。



视频讲解

A. 圆　　B. 椭圆

C. 抛物线　　D. 双曲线

3. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&3&5&7\\3&5&7&1\\5&7&1&3\\7&1&3&5\end{bmatrix}$ 的行向量组的极大线性无关组所含向量的个数是(　　)。



视频讲解

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

4. 直线 $\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+4}{-7}=\dfrac{z}{3}$ 与平面 $4x-2y-2z=3$ 的位置关系是(　　)。



视频讲解

A. 平行

B. 直线在平面内

C. 垂直相交

D. 相交但不垂直

5. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处(　　)。



视频讲解

A. 连续但不可导

B. 可导但导函数不连续

C. 可导且导函数连续

D. 二阶可导

6. 已知球面方程为$x^2+y^2+z^2=1$，在z轴上取一点P作球面的切线，与球面相切于点M，线段PM长为$2\sqrt{2}$。若点P的坐标为$(0,0,z)$，则$|z|$的值为(　　)。



视频讲解

A. $\sqrt{2}$　　B. 2

C. 3　　D. 4

7. 阅读下面试题。

已知角θ的顶点与原点重合，始边与x轴正半轴重合，终边在直线$y=2x$上，则$\cos 2\theta$为_____。

(1) $-\frac{4}{5}$　(2) $-\frac{3}{5}$　(3) $\frac{3}{5}$　(4) $\frac{4}{5}$

能力考查是数学测试的重点，该测试题突出考查了学生的(　　)。

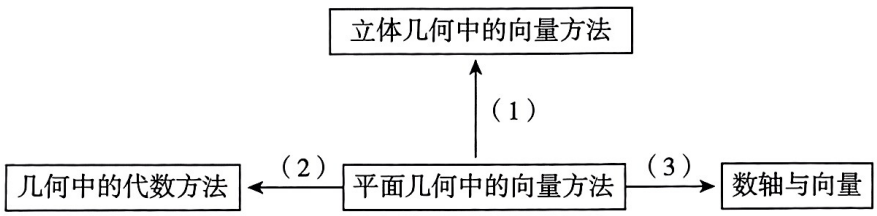


视频讲解

A. 抽象概括能力　　B. 运算求解能力

C. 推理论证能力　　D. 数据处理能力

8. 在下图中的(1)(2)(3)处填写各知识点之间的逻辑关系，其中(1)(2)(3)处填写正确的是(　　)。





视频讲解

A. 推广，类比，特殊化

B. 特殊化，推广，类比

C. 推广，特殊化，类比

D. 类比，特殊化，推广

二、简答题(本大题共5小题，每小题7分，共35分)

9. (1) 任意实数x_1,x_2,x_3,x_4，证明：$e^{\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}} \leqslant \frac{e^{x_1}+e^{x_2}+e^{x_3}+e^{x_4}}{4}$。(4分)



视频讲解

(2) 任意正数y_1,y_2,y_3,y_4，证明：$\sqrt[4]{y_1y_2y_3y_4} \leqslant \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}$。(3分)

10. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}_{3\times4}$ 的秩等于 3，$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的解，其中 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$。

求：(1) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解；(4 分)

(2) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解。(3 分)



视频讲解

11. 已知泊松分布的概率分布为 $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}(k=0,1,2,\cdots)$，求 X 的数学期望。



视频讲解

12. 简述为什么“函数”是普通高中数学课程的主线之一。



视频讲解

13. 简述数学运算的基本内涵。

视频讲解

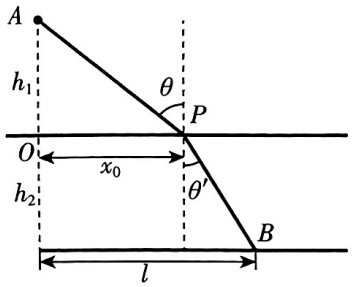
三、解答题(本大题 1 小题,10 分)

14. 已知一束光线在空气中从点 A 到达水面上的点 P,然后折射到水下的点 B(如图),设光在空气中的速度为 c,在水中的速度为 c',光线在点 P 的入射角为 θ,折射角为 θ'。

视频讲解

(1) 若 OP 长为 x_0,请写出光线从点 A 到达点 B 所需时间 $T(x_0)$ 的表达式;(3 分)

(2) 若 $T(x_0)$ 为光线从点 A 到达点 B 所需时间的极小值,求证:$\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta'}=\dfrac{c}{c'}$。(7 分)



四、论述题(本大题 1 小题,15 分)

15. 伴随着大数据时代的到来,数据分析已经深入到社会生活的各个方面,结合实例,阐述在中学数学教学中,培养学生数据分析能力的意义。

视频讲解

五、案例分析题(本大题 1 小题,20 分) 阅读案例,并回答问题。

16. 案例:在“基本不等式:$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}, a, b \in \mathbf{R}^{+}$($\mathbf{R}^{+}$ 表示全体正实数的集合),当且仅当 $a=b$ 时等号成立”的教学中,两位老师创设了如下情境。

情境 1:某商店在“双十一”进行商品降价促销活动,拟分两次降价,有三种促销方案。甲方案是第一次打 p 折销售,第二次打 q 折销售;乙方案是第一次打 q 折销售,第二次打 p 折销售;丙方案是两次均打 $\frac{p+q}{2}$ 折销售。问:哪种促销方案降价更多?

情境 2:现有一台天平两臂之长略有差异,其他均精确,有人要用它称量物体的质量,只需将物体放在左右两个托盘中各称一次,再将称量结果相加后除以 2,就是物体的真实质量,你认为这种做法对不对?如果不对的话,你能否找到一种用这台天平称量物体质量的正确做法?

问题:

(1) 请对上述两种情境创设进行评价;(10 分)

(2) 数学教学中情境创设应该注意哪些问题?(10 分)


视频讲解

六、教学设计题(本大题 1 小题,30 分)

17. 二分法是运用函数性质来求方程近似解的基本方法,为了帮助学生掌握二分法,《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》提出的学习要求是:

① 结合学过的函数图像,了解函数零点与方程解的关系;

② 结合具体连续函数及其图像的特点,了解函数零点存在定理,探索用二分法求方程近似解的思路,并会画程序框图,能借助计算工具用二分法求方程的近似解,了解用二分法求方程近似解的一般性。

请以达到学习要求 ② 为目的,设计“二分法”的一个教学方案,要求:

(1) 写出明确的教学重点;(6 分)

(2) 设计主要的教学环节(问题导入、二分法生成过程、巩固新知),并说明设计意图;(18 分)


视频讲解

(3) 说明教学方案的特色及实施的注意事项。(6 分)

2019年下半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力试题(高级中学)

注意事项:

1. 考试时间为120分钟,满分为150分。
2. 请按规定在答题卡上填涂、作答。在试卷上作答无效,不予评分。

一、单项选择题(本大题共8小题,每小题5分,共40分)

1. 若函数$f(x)=\begin{cases}e^{ax}, & x<0,\\ b+\sin 2x, & x\geqslant 0\end{cases}$在$x=0$处可导,则$a,b$的值是(　　)。



视频讲解

A. $a=2,b=1$　　B. $a=1,b=2$

C. $a=-2,b=1$　　D. $a=2,b=-1$

2. 若函数$f(x)=\begin{cases}x^n\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$的一阶导函数在$x=0$处连续,则正整数$n$的取值是(　　)。



视频讲解

A. $n\geqslant 3$　　B. $n=2$

C. $n=1$　　D. $n=0$

3. 已知点$M_1(1,2,-1)$,$M_2(1,3,0)$,若平面π_1过点M_1且垂直于直线M_1M_2,则平面π_2:$6x+y+18z-18=0$与平面π_1的夹角是(　　)。



视频讲解

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{4}$

C. $\dfrac{\pi}{3}$　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

4. 向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$满足$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,那么$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=$(　　)。



视频讲解

A. $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$　　B. $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}$

C. $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$　　D. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$

5. 设n阶方阵$\boldsymbol{M}$的秩$r(\boldsymbol{M})=r<n$,则在$\boldsymbol{M}$的n个行向量中(　　)。

A. 任意一个行向量均可由其他r个行向量线性表出

B. 任意r个行向量均可构成极大线性无关组

C. 任意r个行向量均线性无关

D. 必有r个行向量线性无关



视频讲解

6. 下列变换中关于直线$y=x$的反射变换是(　　)。



视频讲解

A. $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$　　B. $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

7. 下列是对向量学习意义的描述：

① 有助于学生体会数学与现实生活和其他学科的联系；

② 有助于学生理解数学运算的意义和价值，发展运算能力；

③ 有助于学生掌握处理几何问题的代数方法，体会数形结合思想；

④ 有助于学生理解数学不同内容之间存在的广泛联系。

其中正确的共有(　　)。



视频讲解

A. 1 条　　B. 2 条

C. 3 条　　D. 4 条

8. 数学归纳法的推理方式属于(　　)。



视频讲解

A. 归纳推理　　B. 演绎推理

C. 类比推理　　D. 合情推理

二、简答题(本大题共 5 小题，每小题 7 分，共 35 分)

9. 已知变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{B}$，其中变换矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$。



视频讲解

(1) 写出椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 在该变换下的曲线方程；(5 分)

(2) 举例说明在该变换下什么性质保持不变，什么性质发生变化(例如距离、斜率、相交等)。(2 分)

10. 已知$f(x)=\ln x(x>0)$,$g(x)=\frac{\ln 5}{4}(x-1)$。



视频讲解

(1) 求曲线$y=f(x)$与$y=g(x)$所围平面图形的面积;(4 分)

(2) 求平面图形$0\leqslant y\leqslant f(x)$,$1\leqslant x\leqslant 3$绕$y$轴旋转一周得到的旋转体体积。(3 分)

11. 一个袋子里有 8 个黑球,8 个白球,随机不放回地连续取球 5 次,每次取出 1 个球,求最多取到 3 个白球的概率。



视频讲解

12. 数学文化是指数学的思想、精神、语言、方法、观点,以及它们的形成和发展,还包括数学在人类生活、科学技术、社会发展中的贡献和意义,以及与数学相关的人文活动。请你给出数学教学中融入数学文化的两个事例。



视频讲解

13. 简述数学建模的主要过程。



视频讲解

三、解答题(本大题 1 小题,10 分)

14. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续,且$f(a)\cdot f(b)<0$,请用二分法证明$f(x)=0$在$[a,b]$上至少有一个根。



视频讲解

四、论述题(本大题 1 小题,15 分)

15. 有人说,当前数学教学欠缺的是思维能力的培养。请谈谈你的看法,并给出具体的教学建议。



视频讲解

五、案例分析题(本大题 1 小题,20 分) 阅读案例,并回答问题。

16. 在学习了“直线与圆的位置关系”后,教师要求学生解决如下问题。

求过点 $P(2,3)$ 且与 $\odot O:(x-1)^2+y^2=1$ 相切的直线 l 的方程。

一位学生给出的解法如下。

由 $\odot O:(x-1)^2+y^2=1$ 可知,圆心 $O(1,0)$,半径为 1。设直线 l 的斜率为 k,则其方程为 $y-3=k(x-2)$,即 $kx-y-2k+3=0$,因为直线 l 与 $\odot O:(x-1)^2+y^2=1$ 相切,所以圆心 O 到直线 l 的距离为 $d=\dfrac{|k-2k+3|}{\sqrt{k^2+1}}=1$,解得 $k=\dfrac{4}{3}$,所以所求直线 l 的方程为 $4x-3y+1=0$。

问题:

(1) 指出该解法的错误之处,分析错误原因,并给出两种正确解法;(10 分)

(2) 针对该题的教学,谈谈该如何设置问题,帮助学生避免出现上述错误。(10 分)



视频讲解

六、教学设计题(本大题 1 小题,30 分)

17.《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》对“导数的概念及其意义”提出的学习要求为:

① 通过案例分析,经历由平均变化率过渡到瞬时变化率的过程,了解导数概念的实际背景,知道导数是关于瞬时变化率的数学表达,体会导数的内涵与思想;

② 体会极限思想;

③ 通过函数图像直观理解导数的几何意义。

请针对“导数的概念及其意义”,以达到学习要求 ① 为目的,完成下列教学设计:

(1) 写出教学重点;(6 分)

(2) 写出教学过程(只要求写出新课导入,概念的形成与巩固等过程) 及设计意图。(24 分)



视频讲解

2019年上半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力试题(高级中学)

注意事项:

1. 考试时间为120分钟,满分为150分。
2. 请按规定在答题卡上填涂、作答。在试卷上作答无效,不予评分。

一、单项选择题(本大题共8小题,每小题5分,共40分)

1. 下列选项中,运算结果一定是无理数的是(　　)。

A. 有理数与无理数的和

B. 有理数与有理数的差

C. 无理数与无理数的和

D. 无理数与无理数的差



视频讲解

2. 在空间直角坐标系中,由参数方程$\begin{cases}x=a\cos^2 t,\\ y=a\sin^2 t,\\ z=a\sin 2t\end{cases}(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$所确定的曲线的一般方程是(　　)。

A. $\begin{cases}x+y=a,\\ z^2=2xy\end{cases}$

B. $\begin{cases}x+y=a,\\ z^2=4xy\end{cases}$

C. $\begin{cases}x^2+y^2=a^2,\\ z^2=2xy\end{cases}$

D. $\begin{cases}x^2+y^2=a^2,\\ z^2=4xy\end{cases}$



视频讲解

3. 已知空间直角坐标与球坐标的坐标变换公式为$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\cos\varphi,\\ y=\rho\cos\theta\sin\varphi,\\ z=\rho\sin\theta\end{cases}(\rho\geqslant 0,\ -\pi<\varphi\leqslant\pi,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$,则在球坐标系中,$\theta=\frac{\pi}{3}$表示的图形是(　　)。



视频讲解

A. 柱面

B. 圆面

C. 半平面

D. 半锥面

4. 设$\boldsymbol{A}$为n阶方阵,$\boldsymbol{B}$是$\boldsymbol{A}$经过若干次初等行变换后得到的矩阵,则下列结论正确的是(　　)。



视频讲解

A. $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$

B. $|\boldsymbol{A}|\neq|\boldsymbol{B}|$

C. 若$|\boldsymbol{A}|=0$,则一定有$|\boldsymbol{B}|=0$

D. 若$|\boldsymbol{A}|>0$,则一定有$|\boldsymbol{B}|>0$

5. 已知$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}(\pi x)^{2n-1}$，则$f(1)=$（　　）。



视频讲解

A. -1　　B. 0

C. 1　　D. π

6. 若矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ x & 4 & y\\ -3 & -3 & 5\end{bmatrix}$有三个线性无关的特征向量，$\lambda=2$是$\boldsymbol{A}$的二重特征根，则（　　）。



视频讲解

A. $x=-2,y=2$　　B. $x=1,y=-1$

C. $x=2,y=-2$　　D. $x=-1,y=1$

7. 下列表述属于数学直观想象素养的是（　　）。

① 利用图形描述，分析数学问题；

② 借助空间形式认识事物的位置关系、形态变化和运动规律；

③ 建立形与数的联系，构建数学问题的直观模型，探索解决问题的思路；

④ 在实际情境中从数学的视角发现问题，提出问题，分析问题，建立模型。



视频讲解

A. ①②③　　B. ①②④

C. ①③④　　D. ②③④

8. 下列描述为演绎推理的是（　　）。



视频讲解

A. 从一般到特殊的推理　　B. 从特殊到一般的推理

C. 通过实验验证结论的推理　　D. 通过观察猜想得到结论的推理

二、简答题（本大题共 5 小题，每小题 7 分，共 35 分）

9. 一次实践活动中，某班甲、乙两个小组各 20 名学生在综合实践基地脱玉米粒，一天内每人完成脱粒数量（千克）的数据如下：

甲组：57,59,63,63,64,71,71,71,72,75,
75,78,79,82,83,83,85,86,86,89。

乙组：50,53,57,62,62,63,65,65,67,68,
69,73,76,77,78,85,85,88,94,96。

问题：



视频讲解

（1）分别计算甲、乙两组学生脱粒数量（千克）的中位数；（2 分）

（2）比照甲、乙两组数据，请你给出两种信息，并说明实际意义。（5 分）

10. 在空间直角坐标系下，试判定直线 $l_1:\begin{cases}x+y+1=0,\\x+2y+z+2=0\end{cases}$ 与直线 $l_2:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{1}$ 的位置关系，并求这两条直线间的距离。



视频讲解

11. 在平面直角坐标系下。

（1）三次多项式函数的图像过四个点 $P_1(0,1)$，$P_2(1,3)$，$P_3(-1,3)$，$P_4(2,15)$，求该三次多项式函数的表达式；（4 分）

（2）设 $P_i(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 是平面上满足条件 $x_1<x_2<\cdots<x_n$ 的 n 个点，则由这 n 个点所唯一确定的多项式函数的最高次数是多少？简要说明理由。（3 分）



视频讲解

12. 高中数学课程是培养公民素质的基础性课程，简述“基础性”的含义，并举例说明。



视频讲解

13. 评价学生的数学学习应该采用多样化的方式，请列举四种不同类型的评价方式。



视频讲解

三、解答题（本大题 1 小题，10 分）

14. 设 $\mathbf{R}^2$ 为二维欧氏平面，F 是 $\mathbf{R}^2$ 到 $\mathbf{R}^2$ 的映射，如果存在一个实数 ρ，$0<\rho<1$，使得对于任意的 $P,Q\in\mathbf{R}^2$，有 $d(F(P),F(Q))\leqslant\rho d(P,Q)$（其中 $d(P,Q)$ 表示 P,Q 两点间的距离），则称 F 是压缩映射。

设映射 $T:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$，$T((x,y))=\left(\frac{1}{2}x,\frac{1}{3}y\right)$，$\forall(x,y)\in\mathbf{R}^2$。

（1）证明：映射 T 是压缩映射；（4 分）

（2）设 $P_0=P_0(x_0,y_0)$ 为 $\mathbf{R}^2$ 中任意一点，令 $P_n=T(P_{n-1})$，$n=1,2,3,\cdots$。证明：当 $n\to\infty$ 时，平面点列 $\{P_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n$。（6 分）



视频讲解

四、论述题（本大题 1 小题，15 分）

15. 函数是中学数学课程的主线，请结合实例谈谈如何用函数的观点认识中学数学课程中的方程、不等式、数列等内容。



视频讲解

五、案例分析题(本大题1小题,20分)阅读案例,并回答问题。

16. 案例:

下面提供的案例是教师A和教师B在《方程的根与函数的零点》教学中的"课堂提问"。

教学环节	教师A	教师B
概念的引入	1. 方程 $\ln x + 2x - 6 = 0$ 是否有实数根? 2. 在初中你是如何判断一个方程是否有实数根的? 3. 函数与方程之间有什么关系?	1. 观察三组一元二次方程及其相应的二次函数,你能发现方程的根和函数图像与 x 轴交点之间有何关系吗?
概念的学习	4. 怎样定义函数的零点? 5. 函数的零点是点吗?	2. 函数的零点如何定义? 3. $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ 的零点是什么? 4. 根据下列函数图像,判断函数有几个零点?
概念的意义	6. 函数零点的几何意义是什么?	5. 函数零点的几何意义是什么?
零点存在性定理的引入	7. 根据函数图像判断满足什么条件时函数有零点?	6. 观察 $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ 的图像,它在 $[-4,-2]$ 上有零点,计算 $f(-4)$ 和 $f(-2)$ 的乘积,你能发现这个乘积有什么特点吗?在区间 $[0,2]$ 上是否也具有这种特点?
零点存在性定理的学习	(教师板书:如果函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的图像是连续不断的一条曲线,并且有 $f(a) \cdot f(b) < 0$,那么函数 $y = f(x)$ 在区间 (a,b) 内有零点,即存在 $c \in (a,b)$ 使 $f(c) = 0$,这个 c 也就是方程 $f(x) = 0$ 的根) 8. 满足定理条件的函数零点是唯一的吗? 9. 满足什么条件零点唯一?依据是什么?	(教师板书:如果函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的图像是连续不断的一条曲线,并且 $f(a) \cdot f(b) < 0$,那么函数 $y = f(x)$ 在区间 (a,b) 内有零点,即存在 $c \in (a,b)$ 使得 $f(c) = 0$,这个 c 也就是方程 $f(x) = 0$ 的根) 7. 为何要求函数的图像连续? 8. 能否由"函数 $y = f(x)$ 在区间 (a,b) 内有零点"得到"$f(a) \cdot f(b) < 0$"? 9. 如果函数图像在 $[a,b]$ 连续,能否由"$f(a) \cdot f(b) < 0$"判断函数在区间 (a,b) 内零点只有一个?
例题及练习、小结	(略)	(略)

问题:

(1)请对两位教师的课堂提问进行评价,并简述理由;(15分)

(2)请对两位教师"概念引入"环节的课堂提问给出改进建议。(5分)



视频讲解

六、教学设计题(本大题1小题,30分)

17. “简单随机抽样(第一课时)”的教学目标设计如下。

目标一:学会从现实生活或其他学科中提出具有一定价值的统计问题,理解随机抽样的必要性;

目标二:结合具体的实际问题情境,体会简单随机抽样的重要性;

目标三:以“问题链”的形式理解样本是否具有代表性。

要求:

(1) 请针对上述教学目标,完成下列任务:



视频讲解

① 根据教学目标一,设计两个问题,并说明设计意图;(8分)

② 根据教学目标二,给出一个实例,并说明设计意图;(4分)

③ 根据教学目标三,设计“问题链”(至少包含两个问题),并说明设计意图。(6分)

(2) 请针对“简单随机抽样”的内容,回答下列问题:

① 这节课的教学重点是什么?(4分)

② 作为高中阶段“统计”学习的起始课,其难点是什么?(4分)

③ 这节课对后续哪些内容的学习有直接影响?(4分)

2018年下半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力试题(高级中学)

注意事项:

1. 考试时间为120分钟,满分为150分。
2. 请按规定在答题卡上填涂、作答。在试卷上作答无效,不予评分。

一、单项选择题(本大题共8小题,每小题5分,共40分)

1. 与向量 $\boldsymbol{a}=(2,3,1)$ 平行的平面是(　　)。



视频讲解

A. $x-2y+z=3$　　B. $2x+y+3z=3$

C. $2x+3y+z=3$　　D. $x-y+z=3$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ 的值是(　　)。



视频讲解

A. 0　　B. $\dfrac{1}{2}$

C. 1　　D. ∞

3. 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积的必要条件是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上(　　)。



视频讲解

A. 可微　　B. 连续

C. 不连续点的个数有限　　D. 有界

4. 定积分 $\int_{-a}^{a} b\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}x(a>0,b>0)$ 的值是(　　)。



视频讲解

A. πab　　B. $\dfrac{\pi ab}{2}$

C. $\dfrac{\pi ab}{3}$　　D. $\dfrac{\pi ab}{4}$

5. 与向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,1),\boldsymbol{\beta}=(1,1,0)$ 线性无关的向量是(　　)。



视频讲解

A. $(2,1,1)$　　B. $(3,2,1)$

C. $(1,2,1)$　　D. $(3,1,2)$

6. 设 $f(x)=a\cos x+b\sin x$ 是 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的函数,$V=\{f(x)\mid f(x)=a\cos x+b\sin x,a,b\in\mathbf{R}\}$ 是线性空间,则 V 的维数是(　　)。



视频讲解

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. ∞

7. 在下列描述课程目标的行为动词中,要求最高的是(　　)。



视频讲解

A. 理解　　B. 了解

C. 掌握　　D. 知道

8. 命题 P 的逆命题和命题 P 的否命题的关系是(　　)。

A. 同真同假　　B. 同真不同假

C. 同假不同真　　D. 不确定



视频讲解

二、简答题(本大题共 5 小题,每小题 7 分,共 35 分)

9. 求函数 $f(x) = 3\cos x + 4\sin x$ 的一阶导数为 0 的点。



视频讲解

10. 设 $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$,$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ 表示 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 在 $\boldsymbol{D}$ 作用下的像,若 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 满足方程 $xy = 1$,求 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ 满足的方程。



视频讲解

11. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的可导函数,且 $f'(x)$ 有界。证明:存在 $M > 0$,使得对于任意 x_1,$x_2 \in [0,1]$,有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant M|x_1 - x_2|$。



视频讲解

12. 简述日常数学教学中对学生进行学习评价的目的。



视频讲解

13. 给出基本不等式 $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}(a,b>0)$ 的一种几何解释，并说明几何解释对学生数学学习的作用。



视频讲解

三、解答题（本大题 1 小题，10 分）

14. 设随机变量 ξ 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布，即 $P(\xi<x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & x>1,\end{cases}$ 求 $P(\xi^2<x)$。



视频讲解

四、论述题（本大题 1 小题，15 分）

15. 论述数学教学中使用信息技术的作用，并阐述使用信息技术与其他教学手段的关系。



视频讲解

五、案例分析题(本大题1小题,20分)阅读案例,并回答问题。

16. 案例:

下面是高中“集合”一章“集合的含义与表示”的部分教材内容。

在小学和初中,我们已经接触过一些集合,例如,自然数的集合,有理数的集合,不等式的解的集合,到一个定点的距离等于定长的点的集合(即圆),到一条线段的两个端点距离相等的点的集合(即这条线段的垂直平分线)……

那么,集合的含义是什么呢?我们再来看下面的一些例子:

(1)1 ~ 20以内的所有素数;

(2)我国从1991 - 2003年的13年内所发射的所有人造卫星;

(3)金星汽车厂2003年生产的所有汽车;

(4)2004年1月1日之前与中华人民共和国建立外交关系的所有国家;

(5)所有的正方形;

(6)到直线l的距离等于定长d的所有的点;

(7)方程$x^2 + 3x - 2 = 0$的所有实数根;

(8)新华中学2004年9月入学的所有的高一学生。

例(1)中,我们把1 ~ 20以内的每一个素数作为元素,这些元素的全体就是一个集合;同样地,例(2)中,把我国从1991 - 2003年的13年内发射的每一颗人造卫星作为元素,这些元素的全体也是一个集合。

【思考1】

上面的例(3)到例(8)也都能组成集合吗?它们的元素分别是什么?

一般地,我们把研究对象统称为元素(element),把一些元素组成的总体叫作集合(set)(简称为集)。

给定的集合,它的元素必须是确定的。也就是说,给定一个集合,那么任何一个元素在不在这个集合中就确定了。例如,“中国的直辖市”构成一个集合,北京、上海、天津、重庆在这个集合中,杭州、南京、广州……不在这个集合中。“身材较高的人”不能构成集合,因为组成它的元素是不确定的。

一个给定集合中的元素是互不相同的。也就是说,集合中的元素是不重复出现的。只要构成两个集合的元素是一样的,我们就称这两个集合是相等的。

【思考2】

判断下列元素的全体是否组成集合,并说明理由:

(1)大于3小于11的偶数;

(2)我国的小河流。

我们通常用大写拉丁字母$A,B,C,\cdots$表示集合,用小写拉丁字母$a,b,c,\cdots$表示集合中的元素。

如果a是集合A的元素,就说a属于(belong to)集合A,记作$a \in A$;如果a不是集合A中的元素,就说a不属于(not belong to)集合A,记作$a \notin A$。

例如,我们用A表示"1 ~ 20以内的所有素数"组成的集合,则有$3 \in A$,$4 \notin A$,等等。

问题:



视频讲解

(1) 阅读这段教材,概括与集合有关的新知识点;(6分)

(2) 阅读这段教材中的【思考2】,说明设置此栏目内容的主要意图;(6分)

(3) 请说明集合在高中数学课程中的地位和作用。(8分)

六、教学设计题(本大题1小题,30分)

17. 通过直观感知、操作确认,归纳出直线与平面垂直的判定定理:一条直线与一个平面内的两条相交直线垂直,则该直线与此平面垂直。

请你完成下列任务:



视频讲解

(1) 请你设计一个探索该定理的活动或问题情境,并说明设计意图;(10分)

(2) 请你设计一个习题(不必解答),以帮助学生理解该定理,并说明具体的设计意图;(10分)

(3) 请你设计一个习题(不必解答),进一步巩固、应用该定理,并说明具体的设计意图。(10分)

2018年上半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力试题(高级中学)

注意事项:

1. 考试时间为120分钟,满分为150分。
2. 请按规定在答题卡上填涂、作答。在试卷上作答无效,不予评分。

一、单项选择题(本大题共8小题,每小题5分,共40分)

1. 下列命题不正确的是(　　)。

A. 有理数对于乘法运算封闭

B. 有理数可以比较大小

C. 有理数集是实数集的子集

D. 有理数集不是复数集的子集



视频讲解

2. 设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为非零向量,下列四个命题:

(1)$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$垂直于$\boldsymbol{a}$

(2)$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$垂直于$\boldsymbol{b}$

(3)$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$平行于$\boldsymbol{a}$

(4)$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$平行于$\boldsymbol{b}$

正确的个数是(　　)。

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3



视频讲解

3. 设$f(x)$为开区间(a,b)上的可导函数,则下列命题正确的是(　　)。

A. $f(x)$在(a,b)上必有最大值

B. $f(x)$在(a,b)上必一致连续

C. $f(x)$在(a,b)上必有界

D. $f(x)$在(a,b)上必连续



视频讲解

4. 若矩阵$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}a & b & u\\ c & d & v\end{bmatrix}$的秩均为2,则线性方程组$\begin{cases}ax+by=u,\\ cx+dy=v\end{cases}$的解有(　　)。

A. 0个

B. 1个

C. 2个

D. 无穷多个



视频讲解

5. 棱长为 4 的正方体木块，各面均涂成红色，将其锯成 64 个棱长为 1 的小正方体，并将它们搅匀混在一起，随机取出一个小正方体，恰有两面为红色的概率是(　　)。

A. $\frac{3}{8}$　　B. $\frac{1}{8}$

C. $\frac{9}{16}$　　D. $\frac{3}{16}$

视频讲解

6. 在空间直角坐标系中，抛物柱面 $y^2 = 2x$ 与平面 $x - y - 2 = 0$ 的交为(　　)。

A. 椭圆　　B. 两条平行直线

C. 抛物线　　D. 双曲线

视频讲解

7. 下面不属于“尺规作图三大问题”的是(　　)。

A. 三等分任意角

B. 作一个立方体使之体积等于已知立方体体积的二倍

C. 作一个正方形使之面积等于已知圆的面积

D. 作一个正方形使之面积等于已知正方形面积的二倍

视频讲解

8. 下列内容属于高中数学必修课程内容的是(　　)。

A. 风险与决策　　B. 平面向量

C. 数列与差分　　D. 矩阵与变换

视频讲解

二、简答题(本大题共 5 小题，每小题 7 分，共 35 分)

9. 在什么条件下，矩阵 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 存在逆矩阵？求出其逆矩阵。

视频讲解

10. 求二次曲面 $x^2 - 2y^2 + z^2 + xy + 1 = 0$ 过点 $(1,2,2)$ 的切平面的法向量。

视频讲解

11. 设 $a\cos x + b\sin x$ 是 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的函数，$V = \{a\cos x + b\sin x \mid a, b \in \mathbf{R}\}$ 是函数集合。对 $f \in V$，令 $Df(x) = f'(x)$，即 D 将一个函数变成它的导函数。证明：D 是 V 到 V 上既单又满的映射。



视频讲解

12. 简述确定中学数学教学方法的依据。



视频讲解

13. 简述你对《普通高中数学课程标准(实验)》中“探索并掌握两点间的距离公式”这一目标的理解。



视频讲解

三、解答题(本大题 1 小题,10 分)

14. 设$f(x)$是$\mathbf{R}$上的可导函数,$f(x) > 0$,若$f'(x) - 3x^2 f(x) = 0$,$f(0) = 1$,求$f(x)$。



视频讲解

四、论述题(本大题 1 小题,15 分)

15. 论述在高中数学教学中如何理解与处理好面向全体学生与关注学生个体差异的关系。



视频讲解

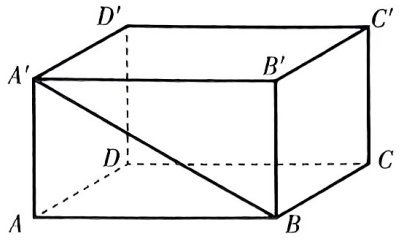
五、案例分析题(本大题 1 小题,20 分)阅读案例,并回答问题。

16. 案例:

教学片段:

通过前面的学习,我们已经得到了异面直线的概念,即不在同一个平面内的两条直线叫作异面直线。为了进一步理解这一概念,请同学们回答下面问题:

如图,在长方体$ABCD - A'B'C'D'$的棱所在的直线中,与线段$A'B$所在直线成异面直线的有几条?



对于这个问题，甲、乙两位同学举手回答，甲同学回答5条，乙同学回答6条。教师只肯定了乙同学后，就要求学生们做另一组题目。

问题：

（1）针对教师的教学处理，谈谈你的看法；（10分）

（2）假如你是这位教师，教学中应如何处理甲同学这种“找不全”的现象？（10分）

视频讲解

六、教学设计题（本大题1小题，30分）

17. 针对“二项式定理”的教学，教师制定了如下的教学目标：

① 掌握二项式定理，能用计数原理推导二项式定理；

② 经历发现二项式定理的过程。

依据这一教学目标，请完成下列任务：

（1）设计一个发现二项式定理的教学引入片段，并说明设计意图；（15分）

（2）给出引导学生运用计数原理推导二项式定理的基本步骤。（15分）

视频讲解

2017年下半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力试题(高级中学)

注意事项:

1. 考试时间为120分钟,满分为150分。
2. 请按规定在答题卡上填涂、作答。在试卷上作答无效,不予评分。

一、单项选择题(本大题共8小题,每小题5分,共40分)

1. 矩阵$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$的秩为(　　)。



视频讲解

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

2. 当$x \to x_0$时,与$x - x_0$是等价无穷小的为(　　)。



视频讲解

A. $\sin(x - x_0)$　　B. e^{x-x_0}

C. $(x - x_0)^2$　　D. $\ln|x - x_0|$

3. 下列四个级数中条件收敛的是(　　)。



视频讲解

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$　　B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$　　D. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$

4. 下列关于椭圆的论述:

① 平面内到两个定点的距离之和等于常数的动点轨迹是椭圆;

② 平面内到定直线和直线外的定点距离之比为大于1的常数的动点轨迹是椭圆;

③ 从椭圆的一个焦点发出的射线,经椭圆反射后通过椭圆的另一个焦点;

④ 平面与圆柱面的截线是椭圆。

正确的个数是(　　)。



视频讲解

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

5. 下列多项式为正定二次型的是(　　)。



视频讲解

A. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$

B. $x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2x_3 + 5x_2^2 + x_3^2$

C. $3x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2$

D. $3x_1x_2 + 2x_2x_3 - 4x_1x_3$

6. 已知随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，设随机变量 $Y=2X-3$，则 Y 服从的分布是(　　)。

A. $N(2\mu-3,2\sigma^2-3)$

B. $N(2\mu-3,4\sigma^2)$

C. $N(2\mu-3,4\sigma^2+9)$

D. $N(2\mu-3,4\sigma^2-9)$



视频讲解

7. “等差数列”和“等比数列”概念之间的关系是(　　)。

A. 交叉关系　　B. 同一关系

C. 属种关系　　D. 矛盾关系



视频讲解

8. 在集合、三角函数、导数及其应用、平面向量和空间向量五个内容中，属于高中数学必修课程内容的有(　　)。

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个



视频讲解

二、简答题(本大题共 5 小题，每小题 7 分，共 35 分)

9. 在线性空间 $\mathbf{R}^3$ 中，已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,4)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,-3,2)$，记 $V_1=\{\lambda\boldsymbol{\alpha}_1+\mu\boldsymbol{\alpha}_2\mid\lambda,\mu\in\mathbf{R}\}$，$V_2=\{k\boldsymbol{\alpha}_3\mid k\in\mathbf{R}\}$。令 $V_3=\{t_1\boldsymbol{\eta}_1+t_2\boldsymbol{\eta}_2\mid t_1,t_2\in\mathbf{R},\boldsymbol{\eta}_1\in V_1,\boldsymbol{\eta}_2\in V_2\}$。

(1) 求子空间 V_3 的维数；(3 分)

(2) 求子空间 V_3 的一个标准正交基。(4 分)



视频讲解

10. 据统计，在参加某类职业资格考试的考生中，有 60% 是本专业考生，有 40% 是非本专业考生，其中本专业考生的通过率是 85%，非本专业考生的通过率是 50%。某位考生通过了考试，求该考生是本专业考生的概率。



视频讲解

11. 在平面有界区域内，由连续曲线 C 围成一个封闭图形。证明：存在实数 ζ，使直线 $y = x + \zeta$ 平分该图形的面积。



视频讲解

12. 给出“平行四边形”和“实数”的定义，并说明它们的定义方式。



视频讲解

13. 简述向量的数量积运算与实数的乘法运算的区别。



视频讲解

三、解答题(本大题 1 小题,10 分)

14. 过点 $P(1,3)$ 作椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{12}=1$ 的切线,分别交 x 轴和 y 轴于点 A 和点 B,将线段 AB 绕 x 轴旋转一周,所成旋转曲面记作 S。

(1) 在空间直角坐标系下,写出曲面 S 的方程;(6 分)

(2) 求曲面 S 与平面 $x=0$ 所围成立体图形的体积。(4 分)



视频讲解

四、论述题(本大题 1 小题,15 分)

15. 数学的产生与发展过程蕴含着丰富的数学文化。

(1) 以“导数及其应用”的教学为例,说明在数学教学中如何渗透数学文化;(6 分)

(2) 阐述数学文化对学生数学学习的作用。(9 分)



视频讲解

五、案例分析题(本大题 1 小题,20 分) 阅读案例,并回答问题。

16. 案例:

下列是两位教师对“复数概念”引入的教学片段。

【教师甲】

为了解决 $x^2-2=0$ 在有理数集中无解,以及单位正方形对角线的度量等问题,在初中,把有理数集扩充到了实数集。

$x^2+1=0$ 在实数集中有解吗?类比初中的做法,我们如何做呢?看来,又需要扩充数系。

数学家引入了 i,使 i 是方程 $x^2+1=0$ 的一个根,即使 $i^2=-1$,把这个新数 i 添加到实数集中去,就会得到一个新数集,记作 A,那么方程 $x^2+1=0$ 在 A 中就有解 $x=i$ 了。

这样我们就引入了一个新数。

【教师乙】

16 世纪,意大利数学家卡尔达诺在解决“求两个数,使其和为 10,积为 40”时,认为这两个数是“$5+\sqrt{-15}$”和“$5-\sqrt{-15}$”,这是因为:

$$(5+\sqrt{-15})+(5-\sqrt{-15})=10,$$

$$(5+\sqrt{-15})\times(5-\sqrt{-15})=40。$$

看来 $\sqrt{-15}$ 也是一个存在的数,从而 $\sqrt{-1}$ 是一个存在的数。数学家将 $\sqrt{-1}$ 记为 i,从而 $\sqrt{-15}=\sqrt{15}i$。

这样我们就引入了一个新数。

……

这节课我们学习了复数的表达形式 $a+bi(a,b\in\mathbf{R})$。当然,复数还有其他表示法,在后续的学习中我们会学习到。

问题:

(1) 请分析这两位教师教学引入片段的特点;(12 分)

(2) 复数还有三角表示法,请简述三角表示法的意义。(8 分)



视频讲解

六、教学设计题(本大题1小题,30分)

17. 某位教师设计的高中数学必修内容“分层抽样”的教学目标为:

① 通过实例,了解分层抽样的特点、适用范围及分层抽样的必要性;掌握分层抽样的操作步骤;

② 体会分层抽样、简单随机抽样以及系统抽样的区别与联系,提升整体把握知识的能力。

基于上述内容,完成下列任务:

(1) 基于教学目标①,设计一个实例,总结分层抽样的步骤,并说明设计意图;(21分)



视频讲解

(2) 基于教学目标②,简要说明简单随机抽样、系统抽样以及分层抽样各自的特点及适用范围。(9分)