2023年上半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力试题(高级中学)参考答案及解析

一、单项选择题

1.【答案】C。**解析:**函数$f(x)=(x^{\alpha}-1)g(x)$的导数$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}g(x)+(x^{\alpha}-1)g'(x)$,因为$g(1)=1,\alpha>1$,所以$f'(1)=1^{\alpha-1}\times\alpha g(1)+(1^{\alpha}-1)g'(x)=\alpha$。故本题选C。

2.【答案】D。**解析:**因为$\lim\limits_{x\to0^{+}}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$,$\lim\limits_{x\to0^{-}}e^{\frac{1}{x}}=0$,所以点$x=0$是函数$y=e^{\frac{1}{x}}$的第二类间断点。故本题选D。

3.【答案】B。**解析:**$|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})|=||\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|\cos\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle|$,因为$|\cos\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle|\leqslant1$,所以$|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})|=||\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|\cos\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle|\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\cdot|\boldsymbol{\beta}|$。故本题选B。

4.【答案】A。**解析:**变换T把$\mathbf{R}^{n}$上的点$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)$变换为$x_1x_2$平面上的点$(x_1,x_2,0,\cdots,0)$,这是投影变换。故本题选A。

5.【答案】C。**解析:**AB选项中的方程是平面方程,CD选项中是直线方程。因为过点$M_1(3,-2,1)$,$M_2(-1,0,2)$的直线的方向向量为$\overrightarrow{M_2M_1}=(4,-2,-1)$,所以所求直线方程为$\frac{x-3}{4}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-1}{-1}$。故本题选C。

6.【答案】B。**解析:**“甲射中目标”记为事件A,“乙射中目标”记为事件B。根据题意,目标被射中的概率为$1-P(\overline{A})P(\overline{B})=1-(1-0.4)(1-0.5)=1-0.3=0.7$。故本题选B。

7.【答案】A。**解析:**《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》中指出,高中数学课程内容突出函数、几何与代数、概率与统计、数学建模活动与数学探究活动四条主线,它们贯穿必修、选择性必修和选修课程。故本题选A。

8.【答案】D。**解析:**自由落体问题涉及的模型为$h=\frac{1}{2}gt^2$,不符合指数函数$y=a^{x}(a>0$且$a\neq1)$的形式。故本题选D。

二、简答题

9.【参考答案】

由$\begin{cases}\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=z,\\ z=h,\end{cases}$得$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=h$。

若$h=0$,则$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=0$,化简得$y=\pm\frac{3}{2}x$,该方程表示的是两条直线;

若$h\neq0$,则$\frac{x^2}{4h}-\frac{y^2}{9h}=1$,该方程表示的是双曲线。

10.【参考答案】

(1)设$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$,它是一个三元齐次线性方程组,因为其系数矩阵的行列式

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=\begin{vmatrix}3&3&1\\2&1&1\\1&4&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&3&1\\-1&-2&0\\1&4&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&-2\\1&4\end{vmatrix}=-2\neq0,$$

所以方程组只有零解,即$x_1=x_2=x_3=0$,因此向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关,进而可知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是三维空间的一组基。

(2)令$\boldsymbol{\alpha}_4=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$,它是一个三元非齐次线性方程组,对其增广矩阵进行初等行变换,有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3 \mid \boldsymbol{\alpha}_4)=\left[\begin{array}{ccc|c}3&3&1&8\\2&1&1&8\\1&4&0&6\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}3&3&1&8\\-1&-2&0&0\\1&4&0&6\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}3&3&1&8\\-1&-2&0&0\\-1&0&0&6\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}0&0&1&17\\0&1&0&3\\1&0&0&-6\end{array}\right],$$

即$\begin{cases}k_1=-6,\\k_2=3,\\k_3=17,\end{cases}$ 所以向量 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 在基底 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为$(-6,3,17)$。

11.【参考答案】

(1) 因为二维随机变量(X,Y)服从集合$\{(n,m)\mid -2\leqslant n\leqslant 2,-2\leqslant m\leqslant 2\}$上的均匀分布,其中$n,m$都是整数,即25个整数点$(n,m)$出现的概率相等,所以$P(X=n,Y=m)=\frac{1}{25}$,其中$n,m=-2,-1,0,1,2$。

因此$P(X=n)=\frac{1}{25}\times 5=\frac{1}{5}$,$n=-2,-1,0,1,2$,故随机变量$X$的概率分布为

X	-2	-1	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

(2) 随机变量$Z=\min\{X,Y\}$的可能取值为$-2,-1,0,1,2$。

$P(Z=-2)=P(X=-2,Y=-2)+P(X=i,Y=-2)+P(X=-2,Y=j)=\frac{9}{25}$,其中$i,j=-1,0,1,2$;

$P(Z=-1)=P(X=-1,Y=-1)+P(X=i,Y=-1)+P(X=-1,Y=j)=\frac{7}{25}$,其中$i,j=0,1,2$;

$P(Z=0)=P(X=0,Y=0)+P(X=i,Y=0)+P(X=0,Y=j)=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$,其中$i,j=1,2$;

$P(Z=1)=P(X=1,Y=1)+P(X=2,Y=1)+P(X=1,Y=2)=\frac{3}{25}$;

$P(Z=2)=P(X=2,Y=2)=\frac{1}{25}$。

因此,随机变量Z的概率分布为

Z	-2	-1	0	1	2
P	$\frac{9}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{1}{25}$

12.【参考答案】

① 以长方体为载体,直观认识和描述空间中点、直线、平面的位置关系,可以给学生一个空间直线、平面位置关系的整体认识,逐步改变学生习惯于在一个平面内考虑问题的状态,以便发展学生的直观想象素养。

② 联系长方体模型,让学生经历从实际问题中抽象出空间图形的过程,加强由实际模型到图形,再由图形到实际模型的基本训练,逐步培养由图形想象出空间位置关系的能力。

13.【参考答案】

高中数学中与“函数单调性”密切相关的具体知识有:

① 集合、区间,单调性通常是函数定义域的某个子集上具有的性质;

② 不等式,函数单调性的定义本质上是不同函数值的不等关系;

③ 指数函数、对数函数、幂函数、三角函数等具体函数,单调性是这些具体函数的性质;

④ 导数,通过导数研究可导函数的单调性;

⑤ 极值、最值，通过研究函数在特定区间上的单调性判断函数的极值和最值。

三、解答题

14.【参考答案】

根据函数一致连续的定义，要证明函数$f(x)=x+\sin x$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续，需证明对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，对任意$x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，当$|x_1-x_2|<\delta$时，有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$。

对任意$x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，根据三角不等式，有

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|x_1-x_2+\sin x_1-\sin x_2|\leqslant|x_1-x_2|+|\sin x_1-\sin x_2|,$$

又由拉格朗日中值定理可知，在x_1和x_2之间存在ξ，有

$$|\sin x_1-\sin x_2|=|(x_1-x_2)\cos\xi|\leqslant|x_1-x_2|,$$

因此，对任意$\varepsilon>0$，取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$，对任意$x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，当$|x_1-x_2|<\delta$时，有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant 2|x_1-x_2|<\varepsilon,$$

即证得函数$f(x)=x+\sin x$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续。

四、论述题

15.【参考答案】

对数的概念：一般地，如果$a^x=N(a>0,\text{且}a\neq1)$，那么数$x$叫作以$a$为底$N$的对数，记作$x=\log_a N$，其中$a$叫作对数的底数，$N$叫作真数。

对数的运算性质：如果$a>0$，且$a\neq1,M>0,N>0$，那么①$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$；②$\log_a\dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；③$\log_a M^n=n\log_a M(n\in\mathbf{R})$。

从上述对数运算的性质①可知，通过对数运算可以将加法运算和乘法运算互相转化，一般来说，加法运算比乘法运算更简单，因此通过对数运算把乘法运算转化为加法运算，可以简化运算，提高运算效率。

五、案例分析题

16.【参考答案】

(1) 不正确。因为关系式$k=\dfrac{y-y_0}{x-x_0}$不能表示点$P_0(x_0,y_0)$在直线l上。

(2)① 想要得到直线l上每个点的坐标(x,y)都满足关系式$y-y_0=k(x-x_0)$，还需要验证点P_0的坐标(x_0,y_0)也满足关系式$y-y_0=k(x-x_0)$，将点P_0的坐标代入直线的点斜式方程中，可得等式两边相等。

② 验证坐标满足关系式$y-y_0=k(x-x_0)$的每一个点都在直线l上。若点$P_1(x_1,y_1)$的坐标满足关系式$y-y_0=k(x-x_0)$，则$y_1-y_0=k(x_1-x_0)$。当$x_1=x_0$时，$y_1=y_0$，这时点P_1与P_0重合，显然有点P_1在直线l上；当$x_1\neq x_0$时，有$k=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$，这表明过点$P_1,P_0$的直线$l_1$的斜率为$k$，因为直线$l,l_1$的斜率都为$k$，且都过点$P_0$，所以它们重合，即点$P_1$在直线$l$上。故坐标满足关系式$y-y_0=k(x-x_0)$的每一个点都在直线$l$上。

六、教学设计题

17.【参考答案】

(1) 由①得

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{c}|^2&=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\\&=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos C,\end{aligned}$$

所以

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C,$$

同理可得$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$。

(2) 教学目标：

① 理解用向量的数量积证明余弦定理的方法，掌握并熟记余弦定理，能利用余弦定理解三角形；

② 通过直角三角形到一般三角形的过渡，提升归纳总结能力，通过余弦定理推导证明的过程，建立形与数的联系，借助几何直观理解问题，提升运用所学知识解决实际问题的能力；

③ 通过三角函数、余弦定理、向量的数量积等知识间的关系，感受事物之间的普遍联系与辩证统一。

教学重点：余弦定理的证明过程和应用。

(3) 问题 1：已知三角形的两边和它们的夹角，怎么求第三边？

设计意图：从学生已知的知识入手，给学生提供一些解决问题的思路，期望学生能够想到坐标法、向量法、几何法等。

问题 2：在坐标法、向量法、几何法等多种方法中，利用哪种方法证明更加简单呢？

设计意图：从已有的方法入手，引导学生进行分析讨论，期望学生能够答出坐标法计算量较大、几何法证明步骤较多，向量法计算最简单。

问题 3：运用向量法如何解决求第三边的问题？

设计意图：加深学生对向量法在几何中应用的理解和整体把握，体会数形结合的思想。

2022年下半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力试题(高级中学)参考答案及解析

一、单项选择题

1.【答案】C。解析:利用洛必达法则,$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$。故本题选C。

2.【答案】C。解析:函数$f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$在$x^2-3x+2=0$处无定义,即在$x=1$和$x=2$处无定义,又因为初等函数在其定义区间内是连续的,所以函数$f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$的间断点有2个。故本题选C。

3.【答案】D。解析:对$y=2x+e^x$求导得$y'=2+e^x$,所以$y'|_{x=0}=2+1=3$,因此曲线$y=2x+e^x$在点(0,1)处的切线方程是$y-1=3(x-0)$,即$y=3x+1$。故本题选D。

4.【答案】C。解析:对题中矩阵作初等行变换,化成阶梯形矩阵:$\begin{bmatrix}1&0&1&-1\\0&1&2&3\\1&0&3&-1\\-2&0&-2&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&-1\\0&1&2&3\\0&0&2&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$,因为阶梯形矩阵有3个非零行,所以矩阵$\begin{bmatrix}1&0&1&-1\\0&1&2&3\\1&0&3&-1\\-2&0&-2&2\end{bmatrix}$的秩是3。故本题选C。

5.【答案】B。解析:设非零向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$的夹角为$\theta$。若$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=0$,则$\cos\theta=0$,又$0\leqslant\theta\leqslant\pi$,所以$\theta=\dfrac{\pi}{2}$,可得$\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$;若$\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$,则$\theta=\dfrac{\pi}{2}$,所以$\cos\theta=0$,于是$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=0$。因此,"$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=0$"是"$\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$"的充要条件。故本题选B。

6.【答案】B。解析:将一枚质地均匀的硬币抛掷4次,其中有2次正面朝上的概率是$C_4^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{8}$。故本题选B。

7.【答案】A。解析:吴文俊是首届国家最高科技奖的得主,他的研究工作涉及数学的诸多领域,其主要成就表现在拓扑学和数学机械化两个领域,"文华逾九章,拓扑公式彪史册;俊杰胜十书,机器证明誉寰球"是对吴文俊先生毕生成就的高度概括。故本题选A。

8.【答案】B。解析:《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》中明确提出的数学学科核心素养包括:数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析。故本题选B。

二、简答题

9.【参考答案】

方程$e^x+xy-e^y=1-e$两边对x求导,可得$e^x+y+xy'-e^yy'=0$,

整理得$y'=\dfrac{e^x+y}{e^y-x}$,所以$y'(0)=\dfrac{e^0+y(0)}{e^{y(0)}-0}=\dfrac{1+y(0)}{e^{y(0)}}$。

将$x=0$代入方程$e^x+xy-e^y=1-e$,可得$y(0)=1$,

因此,$y'(0)=\dfrac{1+y(0)}{e^{y(0)}}=\dfrac{1+1}{e}=\dfrac{2}{e}$。

10.【参考答案】

设垂直且平分线段 M_1M_2 的平面为 π，则平面 π 过线段 M_1M_2 的中点 $M(2,-1,1)$，且向量 $\overrightarrow{M_1M_2}=(2,2,-4)$ 是平面 π 的一个法向量，于是平面 π 的方程为 $2(x-2)+2[y-(-1)]-4(z-1)=0$，即 $x+y-2z+1=0$，故垂直且平分线段 M_1M_2 的平面方程为 $x+y-2z+1=0$。

11.【参考答案】

“抽到的产品是甲工厂生产的”记为事件 A，“抽到的产品是乙工厂生产的”记为事件 B，“抽到的产品为次品”记为事件 C。

(1) 由全概率公式得，任意抽取的一件产品是次品的概率为

$$P(C)=P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)=40\%\times 2\%+60\%\times 1\%=0.014。$$

(2) 若抽取的这件产品是次品，则该产品出自甲工厂的概率为

$$P(A|C)=\frac{P(AC)}{P(C)}=\frac{P(A)P(C|A)}{P(C)}=\frac{0.008}{0.014}=\frac{4}{7}。$$

12.【参考答案】

一般地，分类应保证“不重不漏”，因此在分类时应遵循以下原则：

(1) 同一性原则。分类应按同一标准进行，即每次分类不能同时使用几个不同的分类依据。如将三角形分为锐角三角形、钝角三角形和等腰直角三角形，分类标准不统一，这显然是错误的。

(2) 互斥性原则。分类后的每个情况应当互不相容，也就是分类后不能有一些事物既属于这个情况，又属于另一个情况。如将实数分为非正数和非负数是错误的，因为非正数和非负数都包含 0。

(3) 层次性原则。分类有一次分类和多次分类之分，一次分类是对被讨论对象只分类一次；多次分类是把分类后所得的情况再进行分类，直至满足需要为止，分层不能越级。如实数分为有理数和无理数，有理数又分为整数和分数。

学习分类的意义：

(1) 分类需要对客观事物进行分析、比较、发现并抽象归纳出事物的一般特点或本质属性，这就为发展数学抽象的核心素养铺平了道路。

(2) 不同类别的分类为深入认识指明了可能的途径，从而可以由特殊到一般逐渐深入地研究对象。

(3) 由于分类活动都是从辨别开始，再抽象为具体概念和定义性概念，最后形成规则和高级规则，即为达到高级思维奠定基础。

(4) 运用分类思想能够帮助学生有条理、有顺序、不重复、不遗漏地归纳整理知识，形成完善合理的知识网络图。

(5) 学会分类是发展组织策略的重要前提，这是由于组织策略是根据知识经验之间的内在关系，对学习材料进行系统、有序的分类，整理与概括，使之结构合理化。

13.【参考答案】

概率和频率的区别与联系：

(1) 概率和频率都是统计系统各元件发生的可能性大小。

(2) 频率是概率的近似值，随着试验次数的增加，频率会越来越接近概率；概率是系统固有的准确值，是客观存在的，与试验的次数无关。

(3) 在实际问题中，通常频率值容易得到，因此常用频率作为概率的估计值。

比如，投掷一枚质地均匀的硬币，正面朝上是一个随机事件，如果仅抛掷 10 次，正面朝上的次数可能是 1 ~ 10 次，结果不能确定，如果做成千上万次试验，出现正面的频率会逐渐稳定在 0.5；从概率的角度看，投掷硬币 1 次出现正面朝上的概率是 0.5，与试验次数无关。

三、解答题

14.【参考答案】

将线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1,\\x_1+2x_2+3x_3=3\end{cases}$的增广矩阵化成行最简阶梯形矩阵：

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&2&2\end{bmatrix},$$

由此可知，非齐次线性方程组的一个特解为$\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}$，同时，非齐次线性方程组对应的导出组的一个基础解系为$\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$。因此，非齐次线性方程组的通解为$k\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}$，其中$k$为任意实数。

四、论述题

15.【参考答案】

(1) 将“几何与代数”整体设计为一个主题，主要有以下两方面原因。

① 高中课程的需求。高中数学中，几何与代数是联系密切的整体，特别是向量作为沟通几何与代数的桥梁，很好地将几何直观与代数运算融合在一起，即将形与数结合在一起。高中课程的这一特点决定了将“几何与代数”整体设计为一个主题有利于课程内容的连贯和完整。

② 学生学习的需求。代数用法则和公式能够有效地对抽象的知识进行推理，但缺乏直观；几何源自于图形的发展，比较直观易懂，但却难以得到深化。因此，只有将两者结合起来，几何为抽象的代数提供原始的模型，代数为几何提供有效的方法，才有助于学生更好地理解数学。

(2) 复数本质上是有序数对，因此复数集$\mathbf{C}$与复平面内的所有点组成的集合是一一对应的，与复平面内以原点为起点的向量组成的集合是一一对应的，这种对应关系为用向量方法解决复数问题或用复数方法解决向量问题创造了条件，如复数的加减运算可以用向量的加减运算的平行四边形法则或三角形法则来理解。

五、案例分析题

16.【参考答案】

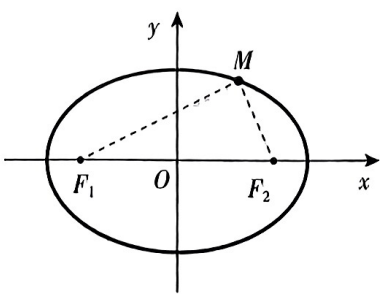
(1) 这名学生的求解过程主要有下面两处错误：① 没有考虑函数$y=\ln(x+1)+\ln(x-3)$的定义域，即要在定义域$(3,+\infty)$内求函数的单调性；② 该生在求二次函数$t=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$的单调性时，错误地认为函数值大于零的区间为单调递增区间。

(2) 函数$y=\ln(x+1)+\ln(x-3)=\ln(x^2-2x-3)$，由$\begin{cases}x+1>0,\\x-3>0\end{cases}$可知，函数的定义域为$(3,+\infty)$，令$t=x^2-2x-3(x>3)$，由于$y=\ln t$是增函数，根据复合函数的“同增异减”法则，只需求二次函数$t=x^2-2x-3(x>3)$的单调递增区间，易得该二次函数的单调递增区间为$(3,+\infty)$，故函数$y=\ln(x+1)+\ln(x-3)$的单调递增区间为$(3,+\infty)$。

六、教学设计题

17.【参考答案】

(1) 以经过椭圆两焦点F_1，F_2的直线为x轴，线段F_1F_2的垂直平分线为y轴，建立平面直角坐标系xOy，如图所示。



设 $M(x,y)$ 是椭圆上任意一点，椭圆的焦距为 $2c(c>0)$，那么焦点 F_1,F_2 的坐标分别为 $(-c,0),(c,0)$。由于绳长为 $2a$，根据椭圆的定义，点 M 与焦点 F_1,F_2 的距离的和等于 $2a$。

由椭圆的定义可知，椭圆可看作点集

$$P=\{M\mid |MF_1|+|MF_2|=2a\}。$$

因为

$$|MF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2},|MF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

所以

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a,$$

化简可得

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2),$$

等式两边同除以 $a^2(a^2-c^2)$ 得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1,$$

由椭圆的定义可知，$2a>2c>0$，即 $a>c$，所以 $a^2-c^2>0$，假设 $a^2-c^2=b^2$，那么椭圆方程可简化为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$。

(2) 教学目标：

① 通过绘制椭圆的过程认识椭圆的几何特征，给出椭圆的定义，推导出椭圆的标准方程，并能解决简单的问题；

② 通过建立适当的坐标系，得到椭圆的标准方程，从中体会建立曲线的方程的方法，发展数学抽象、数学运算素养。

教学重点：椭圆的定义及椭圆的标准方程。

教学过程：

一、创设情境，引入新知

教师用多媒体出示问题：取一条定长的细绳，把细绳的两端拉开一段距离，分别固定在图板的两点处，套上铅笔，拉紧绳子，移动笔尖，看看你能画出什么曲线？

【设计意图】通过创设情境，让学生直观形象地感受新知内容，激发学生的学习兴趣。

二、动手试验，探究新知

学生亲自动手，根据要求画出曲线。教师提出改变定长和定点，观察所画的曲线有什么共同的特点，并要求学生用数学语言刻画这些曲线上的点满足的条件。

【设计意图】由实际操作，强化学生对椭圆的几何特征的认识，并引导学生由此抽象出椭圆的定义。

教师提问：你能用精确的数学语言刻画椭圆吗？

学生尝试用精确的数学语言给出椭圆的定义。如果学生给出的定义不完善，教师通过追问，帮助学生完善，最后师生共同总结出椭圆的定义：平面内与两个定点 F_1,F_2 的距离的和等于常数(大于 $|F_1F_2|$) 的点的轨迹叫作椭圆。这两个定点称为椭圆的两个焦点，两焦点间的距离叫作椭圆的焦距。

教师强调：当常数等于两定点间的距离时，点的轨迹是线段；当常数小于两定点间的距离时，点的轨迹不存在。

【设计意图】通过强化椭圆概念的抽象与建立过程，提高学生思维的严谨性与语言表达能力。

问题：了解椭圆的概念之后，请尝试建立椭圆的方程。

教师带领学生复习用坐标法求动点轨迹方程的一般步骤，类比圆的方程的推导过程，启发学生独立思考动手推导椭圆的标准方程。教师提示学生如何建立合适的直角坐标系，并在学生根据定义得到等式后，还需要对化简过程进行适当的指导。

教师订正答案，讲解并板书推导过程。得到焦点在x轴上的椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$；焦点在$y$轴上的椭圆的标准方程为$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$。

【设计意图】引导学生根据对称性建立合适的坐标系，以椭圆标准方程的推导为载体，使学生掌握推导圆锥曲线方程的一般思路与方法。

三、巩固新知，提升练习

教师设置练习题帮助学生巩固新学知识，学生独立完成，教师订正答案。

【设计意图】自我练习可以进一步地加深学生对所学知识的理解和掌握。

四、归纳小结，布置作业

教师带领学生对本节课的内容进行回顾和反思，构建知识网络，领悟思想方法。布置作业。

【设计意图】对新知内容进一步整合总结，可以帮助学生进一步理解和记忆新知。通过课后练习，让学生进一步地思考和运用新知。

2022年上半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力试题(高级中学)参考答案及解析

一、单项选择题

1.【答案】C。**解析**:利用重要极限和归结原则,$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$。故本题选C。

2.【答案】D。**解析**:因为$\boldsymbol{m}=\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$互相垂直,所以$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=0$,即$(\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\lambda|\boldsymbol{a}|^2+(2-\lambda)|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\frac{\pi}{3}-|\boldsymbol{b}|^2=0$,将$|\boldsymbol{a}|=1,|\boldsymbol{b}|=2$代入,解得$\lambda=2$。故本题选D。

3.【答案】A。**解析**:根据函数的增减性,可知两个增函数的和还是增函数;两个增函数之差的增减性不确定;两个增函数相乘增减性不确定,如$f(x)=x+1,g(x)=x-1$都是$\mathbf{R}$上的增函数,而$f(x)g(x)=x^2-1$在区间$(-\infty,0)$上单调递减,在区间$(0,+\infty)$上单调递增;两个增函数的复合函数还是增函数。故本题选A。

4.【答案】A。**解析**:矩阵的加法满足交换律,即$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$,故A项正确;一般地,矩阵的乘法不满足交换律,即$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$不一定成立,故B项不正确;若$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$都可逆,则有$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})=\boldsymbol{AB}^{-1}+\boldsymbol{BA}^{-1}+2\boldsymbol{E}$,因此$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$不一定成立,故C项不正确;$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$,故D项不正确。故本题选A。

5.【答案】C。**解析**:“甲同学被选中”记为事件A,“乙同学被选中”记为事件B,显然事件A和事件B相互独立,因此至少有一位被选中的概率$P=1-P(\bar{A})P(\bar{B})=1-\left(1-\frac{1}{7}\right)\times\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{11}{35}$。故本题选C。

6.【答案】B。**解析**:三个三维向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关的充要条件是以它们为列向量构成的矩阵的行列式值等于0,即$\begin{vmatrix}1&0&2\\0&1&\lambda\\1&1&2\end{vmatrix}=0$,解得$\lambda=0$。故本题选B。

7.【答案】D。**解析**:用语言、符号或式子表达的,可以判断真假的陈述句叫作命题。① 不是陈述句,故不是命题;② 无法判断真假,故不是命题;③④ 为陈述句,且可以判断真假,故是命题。故本题选D。

8.【答案】C。**解析**:勾股定理发现于《周髀算经》成书之前并记载于该书中;割圆术由刘徽所创,用于计算圆面积和圆周率;更相减损术记载于《九章算术》方田章中,用于求两个数的最大公约数;对数是苏格兰数学家纳皮尔发明的。故本题选C。

二、简答题

9.【参考答案】

函数$f(x)$的导函数$f'(x)=4x^3-12x^2+8x=4x(x-1)(x-2)$,令$f'(x)=0$,解得$x=0,1,2$。当$x$变化时,$f'(x)$和$f(x)$的变化情况如下表所示。

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	单调递减	1	单调递增	2	单调递减	1	单调递增

因此,函数$f(x)$的单调递增区间为$(0,1)$和$(2,+\infty)$,单调递减区间为$(-\infty,0)$和$(1,2)$,极大值为$f(1)=2$,极小值为$f(0)=f(2)=1$。

10.【参考答案】

直线l_1过点$(1,2,3)$,且一个方向向量为$\boldsymbol{m}_1=(1,1,-1)$;直线$l_2$的一个方向向量为$\boldsymbol{m}_2=(2,1,1)$。设所求平面的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{n}=0,\\\boldsymbol{m}_2\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}x+y-z=0,\\2x+y+z=0,\end{cases}$令$x=1$,得$y=-\frac{3}{2},z=-\frac{1}{2}$,所以

$\boldsymbol{n}=\left(1,-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$，又点(1,2,3)在所求平面上，所以所求平面方程为$(x-1)-\frac{3}{2}(y-2)-\frac{1}{2}(z-3)=0$，即$2x-3y-z+7=0$。

11.【参考答案】

（方法一）

设该班共有学生x人，则女生有$0.6x$人，男生有$0.4x$人，女生选修滑冰的有$0.48x$人，男生选修滑冰的有$0.36x$人。

（1）从该班随机选取一名学生，这名学生选修滑冰的概率为$\frac{0.48x+0.36x}{x}=0.84$。

（2）从该班选修滑冰的学生中随机选取一名学生，这名学生是女生的概率为$\frac{0.48x}{0.48x+0.36x}=\frac{4}{7}$。

（方法二）

记事件A为“从班级中选取一名学生为选修滑冰的学生”，事件G为“从班级中选取一名学生为女生”，事件B为“从班级中选取一名学生为男生”，根据题意$P(G)=0.6,P(B)=0.4,P(A|G)=0.8,P(A|B)=0.9$。

（1）从该班随机选取一名学生，这名学生选修滑冰的概率

$$P(A)=P(A|G)P(G)+P(A|B)P(B)=0.8\times0.6+0.9\times0.4=0.84。$$

（2）从该班选修滑冰的学生中随机选取一名学生，这名学生是女生的概率

$$P(G|A)=\frac{P(AG)}{P(A)}=\frac{P(A|G)P(G)}{P(A)}=\frac{0.8\times0.6}{0.84}=\frac{4}{7}。$$

12.【参考答案】

方法一：利用代数方法研究椭圆的几何性质，如通过对椭圆的标准方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的讨论，可以知道标准方程中的$a,b$以及$c,e$（离心率）的几何意义，$a,b,c,e$之间的相互关系，也可以得到椭圆的范围、对称性、顶点、形状等几何性质。

方法二：利用信息技术工具研究椭圆的几何性质，如通过信息技术来研究椭圆的离心率e的变化对椭圆形状的影响。

13.【参考答案】

①不等号左边分别是点(x,y)到点$(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$的距离，设置该习题可以帮助学生加深对两点间距离公式的理解，起到巩固新知的作用。

②该问题的解决需要学生将代数关系“翻译成”图形的几何关系，进而利用几何知识解决问题，这有助于学生提升直观想象能力；一道习题联系拓展多个知识点，能够提高学生分析、解决问题的能力。

三、解答题

14.【参考答案】

（1）由于$y'=\frac{1}{2}x$，所以抛物线在点(2,1)处的切线的斜率$y'|_{x=2}=1$，因此切线方程为$y-1=x-2$，整理得$y=x-1$。

（2）由于$y'=\frac{1}{2}x$，所以抛物线上过点$P(x_0,y_0)$的切线PT的方程为$y-y_0=\frac{x_0}{2}(x-x_0)$，则点$M$的坐标为$(0,-y_0)$，又$F(0,1)$，所以$FM=1+y_0$。又$FP=\sqrt{x_0^2+(1-y_0)^2}=\sqrt{4y_0+(1-y_0)^2}=1+y_0$，所以$FM=FP$。因此，$\angle FMP=\angle FPM$，又$\angle FPM=\angle QPT$，所以$\angle FMP=\angle QPT$，于是$PQ\parallel FM$，即$PQ$与$y$轴平行。

四、论述题

15.【参考答案】

导入阶段：向学生介绍历史上数学家（或科学家）们对“已知物体运动的路程作为时间的函数，求物体在

任意时刻的速度与加速度”“求曲线的切线”等问题的研究，是导数产生的直接原因。这样既可以介绍导数产生的实际背景，说明导数概念的产生是数学发展的必然结果，又可以从探究这些问题出发来展开教学。

形成阶段：教师结合历史上数学家研究过的问题，通过实例，用极限的方式与学生一起研究“高台跳水运动员的速度”和“抛物线的切线的斜率”两个问题。学生通过两个问题完整地经历从平均变化率过渡到瞬时变化率的过程，进而归纳、概括出导数的概念，这一过程体现了从特殊到一般的数学思想，发展了学生的数学抽象素养。

应用阶段：利用导数作为工具解决历史上困扰数学家很久的问题，如“物体的瞬时速度和加速度”“曲线的切线”等问题，让学生获得成就感，感受到数学的实用性。

五、案例分析题

16.【参考答案】

（1）一般地，设函数$f(x)$的定义域为I，如果$\forall x \in I$，都有$-x \in I$，且$f(-x)=f(x)$，那么函数$f(x)$就叫作偶函数。

研究函数奇偶性的作用：研究函数的奇偶性就是把函数图像的对称性转化为代数关系，沟通了形与数。奇函数关于原点对称，偶函数关于y轴对称；有奇偶性的函数只需要知道y轴一侧的性质就可以推出y轴另一侧的性质。

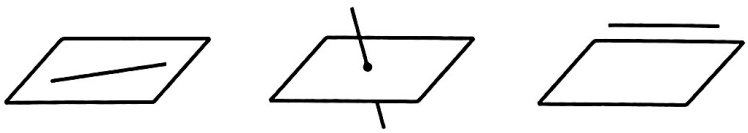
（2）教师甲的教学过程着重强调了通过计算结果得出偶函数的定义，直接提出问题让学生回答，对称性也是由教师直接给出，缺少让学生经历新知探索、自主思考等过程，不利用学生对偶函数概念的理解。

教师乙先让学生画出两个具体函数的图像，并让学生观察、归纳它们的共同特征，学生发现这两个函数的图像都关于y轴对称，这一过程学生可以获得对偶函数的直观定性认识；接着让学生类比刻画函数单调性的方法，尝试用符号语言精确地描述“函数图像关于y轴对称”这一特征，学生通过观察，发现$f(-x)=f(x)$，这一过程引导学生将发现的图像特征进行定量刻画，由此展开接下来的教学，概括出偶函数的定义。教师乙的教学过程为学生铺设了合适的认知台阶，能使学生经历完整的学习过程，有助于学生对偶函数概念的理解。

六、教学设计题

17.【参考答案】

（1）直线与平面的三种位置关系如下图所示：



生活中体现这三种位置关系的实例：

① 直线在平面内：开门关门时，门轴所在直线在门所在平面内；

② 直线与平面相交：操场上，升旗的旗杆所在直线与地面所在平面相交；

③ 直线与平面平行：黑板的一条长边所在直线与地面所在平面平行。

（2）教学目标：① 掌握直线与平面的三种位置关系，会判断直线与平面的位置关系，培养直观想象能力；

② 通过实例探究直线与平面的位置关系，学会用图形语言、符号语言表示三种位置关系；

③ 通过设置问题情境，体会数学与生活的密切联系。

教学重点：通过实例探究直线与平面的位置关系。

教学过程：

一、复习旧知、引入新知

教师带领学生一起回忆直线与直线的三种位置关系：① 相交直线 —— 同一平面内，有且只有一个公共点；② 平行直线 —— 同一平面内，没有公共点；③ 异面直线 —— 不同在任何一个平面内，没有公共点。

教师引入新课主题 —— 空间中直线与平面之间的位置关系；并提出问题：直线与平面的位置关系有几种？

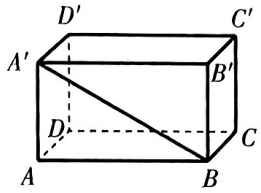
【设计意图】通过复习旧知，可以帮助学生在巩固旧知的基础上，建立起新旧知识之间的联系；抛出疑问让学生思考，引起学生注意力。

二、设置情境、探究新知

教师让学生拿出一支笔和一个作业本，提问：一支笔所在的直线与一个作业本所在的平面，可能有几种位置关系？

学生举手回答，教师汇总答案：直线在平面内；直线与平面相交；直线与平面平行。

教师利用多媒体展示题目：如图，线段 $A'B$ 所在直线与长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的六个面所在平面有几种位置关系？



学生小组讨论，教师邀请小组代表回答并得到结论：$A'B$ 在平面 $ABB'A'$ 内；$A'B$ 与平面 $ABCD$，$BCC'B'$，$A'B'C'D'$，$ADD'A'$ 均相交；$A'B$ 与平面 $DCC'D'$ 平行。

通过上面的两个例子，教师引导学生思考直线与平面的位置关系的种类，它们分别是以什么作为划分标准的。

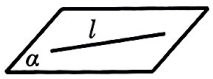
学生思考讨论并回答。教师带领学生一起总结直线与平面的三种位置关系：

① 直线在平面内 —— 有无数个公共点；

② 直线与平面相交 —— 有且只有一个公共点；

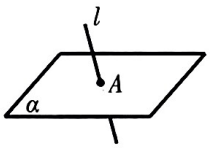
③ 直线与平面平行 —— 没有公共点。

教师请学生尝试用符号语言和图形语言表示直线与平面的位置关系。教师巡视指导，并总结板书。



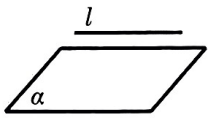
直线在平面内

$l\subset\alpha$



直线与平面相交

$l\cap\alpha=A$



直线与平面平行

$l/\!/\alpha$

【设计意图】通过提问使学生加深对直线与平面之间的位置关系的理解，并引导学生深层次地参与到教学过程中，培养学生的数学思维能力。

三、巩固新知，提升练习

教师设置练习题帮助学生巩固新学知识，学生独立完成，教师订正答案。

【设计意图】自我练习，可以进一步地加深学生对所学知识的理解和掌握。

四、归纳小结，布置作业

教师带领学生归纳总结直线与平面的三种位置关系。布置作业。

【设计意图】对新知内容进一步整合总结，可以帮助学生进一步理解和记忆新知。通过课后练习，让学生进一步地思考和运用新知。

2021年下半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力试题(高级中学)参考答案及解析

一、单项选择题

1.【答案】D。 **解析**：对题中矩阵作初等行变换，化成阶梯形矩阵：$\begin{bmatrix}1&2&3&1\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\1&3&5&4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-r_1]{r_2-2r_1\\r_3-3r_1}\begin{bmatrix}1&2&3&1\\0&-1&-2&-1\\0&-2&-8&-1\\0&1&2&3\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3-2r_2}\begin{bmatrix}1&2&3&1\\0&-1&-2&-1\\0&0&-4&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}$，因为阶梯形矩阵有4个非零行，所以矩阵$\begin{bmatrix}1&2&3&1\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\1&3&5&4\end{bmatrix}$的秩是4。故本题选D。

2.【答案】D。**解析**：由已知得$\boldsymbol{a}=(1,-2,3)$，$\boldsymbol{b}=(2,3,-3)$，所以$\boldsymbol{a}\cdot(-3\boldsymbol{b})=(-3)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(-3)\times[1\times2+(-2)\times3+3\times(-3)]=39$。故本题选D。

3.【答案】C。**解析**：由归结原则，知$\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)^2\sin\dfrac{1}{2n^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)^2\sin\dfrac{1}{2x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x+1)^2}{2x^2}=2$，其中用到了等价无穷小替换$\sin\dfrac{1}{2x^2}\sim\dfrac{1}{2x^2}(x\to+\infty)$。故本题选C。

4.【答案】B。**解析**：依题意知，所求切线的斜率为1，由变上限积分相关知识可知$y'=\mathrm{e}^{x^2}$。设切点为(x_0,y_0)，则$y'(x_0)=\mathrm{e}^{x_0^2}=1$，解得$x_0=0$，于是$y_0=0$。因此，该切线的方程为$y=x$。故本题选B。

5.【答案】A。**解析**：将该椭圆绕z轴旋转一周，则方程$x^2+\dfrac{z^2}{9}=1$中的z保持不变，x替换为$\pm\sqrt{x^2+y^2}$，所以所得旋转曲面的方程是$x^2+y^2+\dfrac{z^2}{9}=1$。故本题选A。

6.【答案】B。**解析**：设存在实数k_1,k_2，满足$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{0}$。由题意知，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2$，所以$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=(k_1+\lambda_1k_2)\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2k_2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$，又因为属于不同特征值的特征向量线性无关，所以特征向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关，则$\begin{cases}k_1+\lambda_1k_2=0,\\\lambda_2k_2=0。\end{cases}$因此，向量$\boldsymbol{\alpha}_1$与$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$线性无关等价于关于$k_1,k_2$的齐次线性方程组$\begin{cases}k_1+\lambda_1k_2=0,\\\lambda_2k_2=0\end{cases}$只有零解，等价于$\begin{vmatrix}1&\lambda_1\\0&\lambda_2\end{vmatrix}=\lambda_2\neq0$。故本题选B。

7.【答案】C。**解析**：观察可知，会标中有勾股弦图、旋转变换、数字进位制等，没有涉及杨辉三角图。会标中，位于中心的是弦图，弦图是三国时期的数学家赵爽给出的勾股定理的一个绝妙证明，现在是中国数学会的会标；在中心外侧画了阴(蓝色)、阳(红色)两个外切的左旋悬臂；主画面右下方标明“ICME-14”，ICME-14下边的“卦”是用中国古代八进制计数写出的八进制数字3745，换算成十进制就是2021($3\times8^3+7\times8^2+4\times8^1+5\times8^0=2021$)，从四个“卦”中也可以读出2021的二进制码：(0)11111100101。故本题选C。

8.【答案】B。**解析**：选项中只有三角函数是周期函数。故本题选B。

二、简答题

9.【参考答案】

$$(1)A=\begin{vmatrix}1&2&2\\1&3&1\\2&1&k\end{vmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&2&2\\0&1&-1\\0&-3&k-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1\\-3&k-4\end{vmatrix}=k-7=0,\text{所以 } k=7。$$

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha}_3=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2$，求 x_1,x_2 的值就是解非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\alpha}_3$，其中 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}$。对方程组的增广矩阵作初等行变换，

$$(\boldsymbol{B},\boldsymbol{\alpha}_3)=\left[\begin{array}{cc:c}1&2&2\\1&3&1\\2&1&7\end{array}\right]\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left[\begin{array}{cc:c}1&2&2\\0&1&-1\\0&-3&3\end{array}\right]\xrightarrow{r_3+3r_2}\left[\begin{array}{cc:c}1&2&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{r_1-2r_2}\left[\begin{array}{cc:c}1&0&4\\0&1&-1\\0&0&0\end{array}\right],$$

所以 $\boldsymbol{x}=(4,-1)^{\mathrm{T}}$，即 $\boldsymbol{\alpha}_3=4\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$。

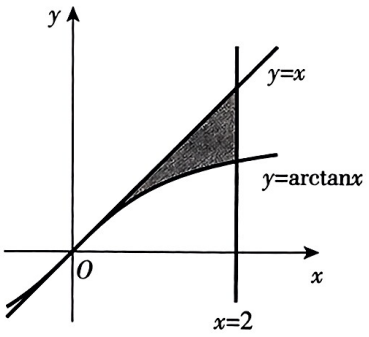
10.【参考答案】

曲线 $y=\arctan x$ 与直线 $y=x,x=2$ 所围成的平面区域如图所示，所求面积为

$$\int_0^2(x-\arctan x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^2-\int_0^2\arctan x\mathrm{d}x=2-\left(x\arctan x\Big|_0^2-\int_0^2x\mathrm{d}\arctan x\right)$$

$$=2-2\arctan 2+\int_0^2\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=2-2\arctan 2+\frac{1}{2}\int_0^2\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}(1+x^2)$$

$$=2-2\arctan 2+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^2=2-2\arctan 2+\frac{1}{2}\ln 5。$$



11.【参考答案】

(1) 记“乙在 3 次射击中击中目标的次数”为 X，则根据题意 X 服从二项分布 $X\sim B\left(3,\frac{1}{2}\right)$。因此，乙在 3 次射击中恰好击中 1 次目标的概率 $P(X=1)=\mathrm{C}_3^1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$。

(2) 已知甲在 3 次射击中恰好击中 2 次目标，要想甲最终获胜，则乙在 3 次射击中都没有命中目标或只有 1 次命中目标，即 $X=0$ 或 $X=1$。所以甲获胜的概率 $P=P(X=0)+P(X=1)=\mathrm{C}_3^0\left(\frac{1}{2}\right)^3+\mathrm{C}_3^1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$。

12.【参考答案】

“四基”是数学基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验的简称；“四能”是从数学角度发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力的简称。

13.【参考答案】

简单随机抽样：设一个总体含有 N 个个体，从中逐个抽取 $n(1\leqslant n<N)$ 个个体作为样本，如果抽取是有放回的，且每次抽取时总体内的各个个体被抽到的概率都相等，我们把这种抽样方法叫作放回简单随机抽样；如

果抽取是不放回的，且每次抽取时总体内未进入样本的各个个体被抽到的概率都相等，我们把这种抽样方法叫作不放回简单随机抽样；放回简单随机抽样和不放回简单随机抽样统称为简单随机抽样。例如，为检验某公司生产的袋装牛奶是否达标，要从一批1000袋的牛奶中抽取50袋进行检验，则可以先对这1000袋牛奶进行编号，利用随机数表法随机抽取50个号码，将对应的牛奶拿出来检验，这样的抽样方法就是不放回简单随机抽样。

分层抽样：如果总体由差异明显的几部分组成，为了使样本更加充分地反映总体的这种差异情况，在抽样时将总体分成互不交叉的层，然后按照一定的比例，从各层独立抽取一定数量的个体，将各层取出的个体合在一起作为样本，这种抽样方法叫作分层抽样。例如，某地区有高中生3200人，初中生8000人，小学生6400人，教育部为了了解该地区中小学生的近视情况，要从本地区的学生中抽取100人进行调查。因为不同年龄阶段的学生的视力情况有着非常明显的差异，所以这种情况宜采用分层抽样，这样取得的样本更具有代表性。

三、解答题

14.【参考答案】

证明：若$f(c)=f(d)$，则$f(c)=f(d)=\frac{k}{2}$，因此ξ取c或d即可。

若$f(c)\neq f(d)$，不妨设$f(c)<f(d)$，则$f(c)<\frac{f(c)+f(d)}{2}<f(d)$，即$\frac{k}{2}\in(f(c),f(d))$，因为函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，所以函数$f(x)$在$[c,d]$上连续，根据连续函数的介值定理，存在$\xi\in(c,d)\subset(a,b)$，使得$f(\xi)=\frac{k}{2}$，即$2f(\xi)=k$。

四、论述题

15.【参考答案】

（1）高中阶段函数的定义：一般地，设A，B是非空的实数集，如果对于集合A中的任意一个数x，按照某种确定的对应关系f，在集合B中都有唯一确定的数y和它对应，那么就称$f:A\to B$为从集合A到集合B的一个函数，记作$y=f(x)$，$x\in A$。

（2）初中阶段函数的定义：一般地，在一个变化过程中，如果有两个变量x和y，并且对于x的每一个确定的值，y都有唯一确定的值与其对应，那么就说x是自变量，y是x的函数。

相同点：

①初高中阶段函数的定义，都是在刻画变量与变量之间的依赖关系，以此来反映现实世界中的自然规律。

②初高中阶段函数的定义中，对于每一个自变量x，其对应的函数值y是唯一的，即中学阶段涉及的函数都是单值函数。

不同点：

①初中阶段函数的定义中“y与x对应”仅仅是自然语言，而高中阶段函数的定义中明确了对应的意义，并用集合语言具体指明了x，y的变化范围，引入抽象符号$f:A\to B$和$y=f(x)$表示对应关系。

②初中阶段函数的定义强调一个变量随着另一个变量的变化而变化，用的是“变量关系语言”；高中阶段函数的定义是用集合语言和对应关系刻画函数，用的是“集合—对应语言”；相比于“变量关系语言”，“集合—对应语言”更抽象，也更严谨。

五、案例分析题

16.【参考答案】

（1）第③步计算的$\cos\alpha$的值错误，应该结合$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$计算出$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$；相应地，第⑤步计算的$\sin\alpha$的值也是错误的，$\alpha$在第三象限的正弦值一定是负的，应该是$\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$；第⑥步中正切的公式也写错了，正切公式应为$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$。

(2) 依题意和同角三角函数的基本关系，得$\begin{cases}\sin\alpha-\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{5},\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\end{cases}$消去$\sin\alpha$，得$5\cos^2\alpha-\sqrt{5}\cos\alpha-2=0$，解得$\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$或$\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，因为$\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$，所以$\cos\alpha<0$，故$\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$。将$\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$代入方程组中，可得$\sin\alpha=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，所以$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2$。

(3) 学生在解方程求α的余弦值时，未能及时考虑α的取值范围，使得计算过程不够严谨，逻辑推理能力欠缺。学生计算α的正切值时，公式使用错误，未能正确理解运算对象角的正切值的含义。

六、教学设计题

17.【参考答案】

(1) 垂足Q的坐标为$\left(\dfrac{B^2x_0-ABy_0-AC}{A^2+B^2},\dfrac{A^2y_0-ABx_0-BC}{A^2+B^2}\right)$，于是

$$|PQ|=\sqrt{\left(\frac{B^2x_0-ABy_0-AC}{A^2+B^2}-x_0\right)^2+\left(\frac{A^2y_0-ABx_0-BC}{A^2+B^2}-y_0\right)^2}=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}。$$

因此，点$P(x_0,y_0)$到直线$l:Ax+By+C=0$的距离$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$。

可以验证，当$A=0$或$B=0$时，上述公式仍然成立。

(2) 教学目标如下：

① 理解点到直线的距离公式的推导过程，掌握点到直线的距离公式；

② 通过数形结合提升观察、分析与思考问题的能力，学会用已有知识去探索新知识，在推导过程中强化数学运算和逻辑推理核心素养；

③ 经历整个探索过程，感受数学推理的乐趣。

(3) 一、课堂导入

教师先带领学生复习之前学过的两点间的距离的内容，然后提问：你认为什么是点到直线的距离？

学生思考回忆，自由发言，教师点明：点到直线的距离，就是点到直线垂线段的长度。

问题1：给定一点$P(1,3)$和一条直线$l:x-y-1=0$，你能求出点P到直线l的距离吗？

引发学生思考，进而引出课题——点到直线的距离。

【设计意图】教师带领学生复习相关旧知，降低新知的认识难度，为新知的学习做好准备。

二、公式推导

教师组织学生先对问题进行分析，然后再画出示意图，引导学生尝试思考解题的思路。

给学生一定的思考时间后，教师进行如下提示：

(1) 要想求出点到直线的距离，首先要在图中作出垂线段明确要求的是哪一段距离。

(2) 点到直线的距离可以转化为求点到垂足点的距离。

(3) 垂足点的坐标可以利用两直线求交点坐标得出。

学生小组交流、讨论解题思路，教师请小组代表发言，教师进行点评并带领学生一起梳理解题思路，最后组织学生独立进行解题。

教师订正答案，讲解并板书解题步骤如下：

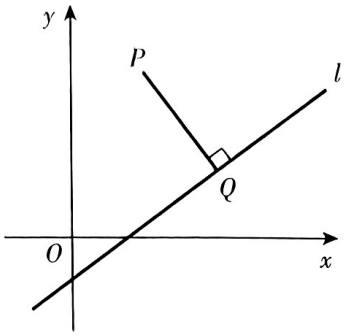
过点P作$PQ\perp l$。因为直线l的斜率为1，所以直线PQ的斜率为-1，又点P的坐标为$(1,3)$，所以直线PQ的方程为$x+y-4=0$，解方程组$\begin{cases}x-y-1=0,\\ x+y-4=0,\end{cases}$解得$Q$点坐标为$\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{3}{2}\right)$，根据两点间的距离公式可求得

$$|PQ|=\sqrt{\left(\frac{5}{2}-1\right)^2+\left(\frac{3}{2}-3\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}。$$

问题2:推广到一般,如果有任意一点 $P(x_0,y_0)$,直线 $l:Ax+By+C=0$,如何求点 P 到直线 l 的距离?

师生一起比较两个问题的共同点,寻找方案,进行推理。

方案:如图,过点 P 作 $PQ\perp l$,求点 P 到直线 l 的距离就是垂线段 PQ 的长度。



教师将推导过程分解为下面几个小步骤,逐步引导学生推导出点到直线的距离公式。

1. 直线 PQ 的斜率为_____,直线 PQ 的方程为_____。

2. 点 Q 的坐标为_____。

3. P,Q 两点间的距离为_____。

教师讲解并板书推导过程(注意对 A,B 等于0和不等于0情况的分类讨论),最后师生共同得出结论:任意一点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $l:Ax+By+C=0$ 的距离 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$。

【设计意图】从一个具体的数学问题入手,引导学生经历思考、运算的过程,为下面一般公式的推导奠定了基础,也消除了学生对抽象数学公式推理的恐惧和畏难心理;通过类比学习,学生能够更好地掌握更高难度的知识;教师的引导为学生理清了证明思路,引导学生逐步得出结论,体验数学活动充满着探索和乐趣。

三、巩固提高

求点 $P(1,-2)$ 到下列直线的距离。

(1) $x=3$;(2) $2y=3$;(3) $2x-y+5=0$;(4) $y=3x+1$。

【设计意图】通过不同形式的练习题引导学生体会点到直线距离公式的一般性,使学生能够熟练应用公式,提高运算能力。

四、课堂小结

(1) 说说本节课你学会了哪些知识与方法?有什么收获?还有什么疑问?

(2) 你还能想到其他方法推导出点到直线的距离公式吗?

【设计意图】引导学生自己回忆、总结本节课的知识,能够加深其对新知的理解和记忆,同时能够锻炼语言表达及总结归纳的能力;开放式的问题能够引发学生的思考,使学生主动探索新的思路,为之后教学其他推导公式的方法奠定良好的基础。

2021年上半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力试题(高级中学)参考答案及解析

一、单项选择题

1.【答案】C。**解析:**直线$\frac{x-2}{1}=\frac{y-11}{2}=\frac{z+1}{-1}$过点$(2,11,-1)$,且一个方向向量为$\boldsymbol{m}=(1,2,-1)$;平面$3x-2y-z+5=0$的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(3,-2,-1)$。由于$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=1\times3+2\times(-2)+(-1)\times(-1)=0$,而$3\times2-2\times11-(-1)+5=-10\neq0$(即点$(2,11,-1)$不在平面上),所以题中直线与平面的位置关系是平行。故本题选C。

2.【答案】A。**解析:**因为$f(x)=\frac{1}{1-x}$在闭区间$\left[0,\frac{1}{3}\right]$和$\left[\frac{3}{2},3\right]$上都连续,所以由康托尔定理知,$f(x)$在$\left[0,\frac{1}{3}\right]$和$\left[\frac{3}{2},3\right]$上都一致连续,从而$f(x)$在$\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{3}{2},3\right]$上一致连续。故本题选A。

对于B,C,D三项,这里以B项为例说明不一致连续。取$\varepsilon_0=1$,令$x_n'=\frac{n-1}{n}$,$x_n''=\frac{n}{n+1}$,则$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$,且$|f(x_n')-f(x_n'')|=1\geqslant\varepsilon_0$,所以$f(x)=\frac{1}{1-x}$在$(-\infty,1)$上不一致连续。

3.【答案】C。**解析:**因为多项式$f(x)=x^4-3x^3+6x-4$的首项系数1的因数只有±1;常数项-4的因数只有±1,±2,±4,所以方程$x^4-3x^3+6x-4=0$的整数解只能是:±1,±2,±4。容易验证,只有$f(1)=0$,$f(2)=0$,所以方程$x^4-3x^3+6x-4=0$共有2个整数解,分别是$x=1$和$x=2$。故本题选C。

4.【答案】C。**解析:**若$y=f(x)$在x_0可微,则有$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$,其中$f'(x_0)\Delta x=f'(x_0)\mathrm{d}x=\mathrm{d}y$。故本题选C。

5.【答案】B。**解析:**将两粒骰子朝上面的点数组合记作(x,y),则(x,y)所有可能的取值有$6\times6=36$(种),其中点数之和等于5的有$(1,4)$,$(2,3)$,$(3,2)$,$(4,1)$,共4种。因此,所求概率为$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$。故本题选B。

6.【答案】B。**解析:**“对于$m\times n$矩阵$\boldsymbol{A}$,存在$n\times s$矩阵$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O})$,使得$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$成立”等价于“$n$元齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有非零解”等价于“系数矩阵$\boldsymbol{A}$的秩小于未知量的个数$n$”,即“$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<n$”。故本题选B。

7.【答案】D。**解析:**《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》中明确提出的数学核心素养包括:数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析。故本题选D。

8.【答案】C。**解析:**常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数。基本初等函数经有限次加、减、乘、除、复合运算所得的函数称为初等函数。题中$f(x)=\pi^x$,$g(x)=\mathrm{e}^x-\ln x^2$,$h(x)=x^\pi+\tan x$是初等函数,$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数},\\ -1, & x\text{为无理数}\end{cases}$不是初等函数。故本题选C。

二、简答题

9.【参考答案】

以A,B两点所在直线为x轴,两点的中点为原点,建立平面直角坐标系,则题中立体图形可以看成是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$绕$x$轴旋转一周得到的。由$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$变形,得$y^2=a^2-c^2-\frac{(a^2-c^2)x^2}{a^2}$,根据旋转体的体积公式,所求立体图形的体积为$\int_{-a}^{a}\pi y^2\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}\left[\pi(a^2-c^2)-\frac{\pi(a^2-c^2)x^2}{a^2}\right]\mathrm{d}x=\left[\pi(a^2-c^2)x-\frac{\pi(a^2-c^2)x^3}{3a^2}\right]\Big|_{-a}^{a}=\frac{4\pi a(a^2-c^2)}{3}$。

10.【参考答案】

(1)X 的分布函数为 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f_X(t)\mathrm{d}t$。

当 $x\leqslant 0$ 时,$F(x)=\int_{-\infty}^{x}0\mathrm{d}t=0$;

当 $x>0$ 时,$F(x)=\int_{-\infty}^{0}f_X(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}f_X(t)\mathrm{d}t=0+\int_{0}^{x}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\mathrm{d}t=-\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\Big|_{0}^{x}=1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$。

综上,$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ 1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}, & x>0。\end{cases}$

(2)由(1)知,$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ 1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}, & x>0,\end{cases}$ 所以 $P(Y=1)=P(X\leqslant 5)=F(5)=1-\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}}$,从而 $P(Y=-1)=P(X>5)=1-P(X\leqslant 5)=\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}}$。

因此,Y 的分布律为

Y	1	-1
P	$1-\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}}$	$\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}}$

11.【参考答案】

(1)行列式②表示向量 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},a_{i3})(i=1,2,3)$ 的混合积,其值即为以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为棱的平行六面体的定向体积($\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 构成左手系时为负,构成右手系时为正)。

(2)方程组①有唯一解表示平面 $\pi_i:a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=b_i(i=1,2,3)$ 相交于一点。行列式②不等于零表示向量 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},a_{i3})(i=1,2,3)$ 的混合积不等于零,即向量 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},a_{i3})(i=1,2,3)$ 不共面。因此,题中结论的几何意义是:平面 $\pi_i:a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=b_i(i=1,2,3)$ 相交于一点当且仅当它们的法向量 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},a_{i3})(i=1,2,3)$ 不共面。

12.【参考答案】

按照新课程理念,教学活动应该是师生积极参与、交往互动、共同发展的过程。有效的教学活动是学生学与教师教的统一,学生是学习的主体,教师是学习的组织者、引导者与合作者。数学教学活动中的留白,是教师设计创造的、有利于学生主动发展的空间和时间。教师讲解得过多、过满,会扼杀学生的学习兴趣,使得教学效果大打折扣。适当的课堂留白能够给予学生足够的思考空间,让学生掌握课堂学习的主动权。

课堂留白能够引导学生进行独立思考,便于学生理解和掌握基本的数学知识与技能、数学思想和方法,获得基本的数学活动经验。巧妙地设计留白,能够使学生从被动地接受到主动地参与课堂教学;能够激发学生的学习兴趣,使学生在教师创造的基础上进行再创造;有利于培养学生的创造性思维,增强学生独立思考、主动探究、合作交流的能力。

13.【参考答案】

实际背景一:某种细胞分裂时,由1个分裂为2个,2个分裂为4个……分裂 x 次后,得到的细胞数 y 和分裂次数 x 之间对应的函数解析式为 $y=2^x,x\in\mathbf{N}^*$。

实际背景二:当生物死亡后,它机体内原有的碳14含量会按确定的比率衰减(称为衰减率),大约每经过5730年衰减为原来的一半,这个时间称为“半衰期”。设生物死亡年数为 x,死亡生物体内碳14含量为 y(把刚死亡的生物体内碳14含量看成1个单位),则其对应函数解析式为 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}},x\in[0,+\infty)$。

指数函数模型的特点:能用指数函数表达的函数模型,当函数单调递增时,随着自变量的增大,函数值增大的速度越来越快;当函数单调递减时,随着自变量的增大,函数值减小的速度越来越慢。

三、解答题

14.【参考答案】

(1) 题中非齐次线性方程组对应的齐次线性方程组为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-4&-5\\0&1&-1&-2\\2&5&-9&-12\\1&3&-5&a\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$。若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解空间的维数为 2，则有 $4-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$，即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$。

为方便题(2) 求非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}[\boldsymbol{b}=(-6,-2,-14,-8)^{\mathrm{T}}]$ 的通解，这里对其增广矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 作初等行变换，化成行阶梯形矩形：

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left[\begin{array}{cccc:c}1&2&-4&-5&-6\\0&1&-1&-2&-2\\2&5&-9&-12&-14\\1&3&-5&a&-8\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cccc:c}1&2&-4&-5&-6\\0&1&-1&-2&-2\\0&1&-1&-2&-2\\0&1&-1&a+5&-2\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cccc:c}1&2&-4&-5&-6\\0&1&-1&-2&-2\\0&0&0&a+7&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right]。$$

显然，要使 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$，需令 $a+7=0$，即 $a=-7$。

(2) 根据题(1)，当 $a=-7$ 时，将增广矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 化成行最简阶梯形矩阵：

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\rightarrow\left[\begin{array}{cccc:c}1&2&-4&-5&-6\\0&1&-1&-2&-2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&-2&-1&-2\\0&1&-1&-2&-2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right]。$$

由此可知，非齐次线性方程组的一个特解为 $\begin{bmatrix}-2\\-2\\0\\0\end{bmatrix}$，同时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 对应导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为 $\begin{bmatrix}2\\1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix}$。因此，题中非齐次线性方程组的通解为 $k_1\begin{bmatrix}2\\1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\-2\\0\\0\end{bmatrix}$，其中 k_1,k_2 为任意实数。

四、论述题

15.【参考答案】

数学运算能力主要表现为：理解运算对象，掌握运算法则，探究运算思路，求得运算结果。

理解运算对象是进行数学运算的起点，是正确进行运算的基础。在很多情况下，数学运算是在具体情境中进行的，能够在具体情境中抽象出运算对象是解决问题的首项任务。例如，平面向量运算中，要能够从多个角度理解平面向量的概念(物理、几何、代数)，并能在综合情境中，借助向量表示有关的问题。

运算法则是运算的依据，是推理的依据，学生只有在深刻记忆并理解运算对象的运算法则的基础上才能进行正确的运算。中学数学中的平面向量运算主要包括向量的加法、减法、数量乘法和向量的数量积，它们有各自的几何意义，只有掌握这些运算法则，才有可能应用向量去解决一些问题。

在实施运算分析和解决问题的过程中，结合情境探究运算思路是解决问题的关键。有了运算思路，就能比较容易地选择运算方法，进而实施运算，得到运算结果。此外，只有理解解决问题的思路，才能掌握一类问题的通性通法，例如，借助平面向量运算可以得到解决各种距离问题的通性通法。

运算以结果为导向，正确计算出结果是优秀运算能力的最终体现，无论是使用哪一种解题思路，在运算法则的指导下正确计算结果才是最终目的。

五、案例分析题

16.【参考答案】

(1) 解答错误之处:该学生在解答中连续两次使用基本不等式,但两个不等式等号成立的条件不同,不等式①等号成立的条件是"$x = y$",不等式②等号成立的条件是"$x = 2y$",该生错误地认为两次取等号的条件是一样的,导致最终结果的错误。

错误原因:该生在运用基本不等式时没有注意等号成立的条件,在连续两次使用基本不等式时,没有验证最值成立的条件。

正确解法:$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(x+2y)=3+\frac{2y}{x}+\frac{x}{y}\geqslant 3+2\sqrt{\frac{2y}{x}\cdot\frac{x}{y}}=3+2\sqrt{2}$,当且仅当$x=\sqrt{2}y=\sqrt{2}-1$时等号成立。

(2) 求二元函数最值,中学阶段常用的解法有:利用基本不等式同时消去两个变量,利用消元法将二元函数化为一元函数,以及借助几何意义用数形结合的方法求解。其中,利用基本不等式的求解方法,题(1)已有具体例题,这里不再举例阐述。

利用消元法求解二元函数最值,一般是选择一个已有变量或重新引入一个变量,通过换元将二元函数化为一元函数。还以题(1)二元函数为例,由$x+2y=1$,以及$x,y>0$,得$x=1-2y,0<y<\frac{1}{2}$,于是$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{1-2y}+\frac{1}{y}$。令$h(y)=\frac{1}{1-2y}+\frac{1}{y}$,借助导数,易知函数$h(y)$在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上先减后增,在$y=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$处取得最小值,最小值为$3+2\sqrt{2}$。

借助几何意义用数形结合的方法求解,一般是根据约束条件和二元函数自身的几何意义,从几何的角度分析二元函数在可行域内的几何性质,利用数形结合找到二元函数的最值。例如,在线性规划问题中,将寻找二元函数的最值转化为寻找直线截距的最值。

六、教学设计题

17.【参考答案】

(1) 在传说故事中,国王计划奖励国际象棋的发明者,后者要求得到的麦粒数量满足如下要求:在棋盘的第1个格子里放1颗麦粒,第2个格子里放2颗麦粒,第3个格子里放4颗麦粒……以此类推,每个格子里放的麦粒数都是前一个格子里放的麦粒数的2倍,直到第64个格子。

问题:

如果把各格所放麦粒数看成一个数列,这是个什么数列?(等比数列)

这个等比数列的首项和公比分别是什么?(首项是1,公比是2)

发明者要求得到的麦粒总数用式子怎么表示出来?($1+2+2^2+\cdots+2^{63}$)

$1+2+2^2+\cdots+2^{63}$究竟等于多少呢?

(2) 设等比数列$\{a_n\}$的首项为a_1、公比为q,则$\{a_n\}$的前n项和是

$$S_n=\begin{cases}na_1, & q=1,\\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q}, & q\neq 1。\end{cases}$$

方法一:

当$q=1$时,数列$\{a_n\}$为常数列,显然有$S_n=na_1$;

当$q\neq 1$时,$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}$①,$qS_n=a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}+a_1q^n$②,①−②,得$(1-q)S_n=a_1-a_1q^n$,即$S_n=\frac{a_1-a_1q^n}{1-q}=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$。

方法二：

当 $q = 1$ 时，数列 $\{a_n\}$ 为常数列，显然有 $S_n = na_1$；

当 $q \neq 1$ 时，$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1} = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n - a_1q^n = a_1 + (a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n) - a_1q^n = a_1 + q(a_1 + a_1q + \cdots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}) - a_1q^n = a_1 + qS_n - a_1q^n$，故 $S_n = \dfrac{a_1 - a_1q^n}{1 - q} = \dfrac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \dfrac{a_1 - a_nq}{1 - q}$。

(3) 教学过程

教师给出假设，设数列 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1、公比为 q 的等比数列，它的前 n 项和为 S_n。

教师板书前 n 项和为 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$。

提问 1：我们知道等比数列最关键的两个参数是首项和公比。大家想一想，上面的式子右边能不能写成只含有首项和公比的形式。

教师带领学生一起完成 $S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1}$①。

提问 2：观察 ① 式，① 式的右边有什么特点？

给学生几分钟时间小组讨论，教师巡视，鼓励学生发散思考。讨论结束后，各组发言阐述讨论结果，教师给予积极评价，并引导学生得出结论：① 式右边相加的各项，从第二项起每一项比前一项多乘一个 q，并由此结论启发学生在 ① 式两边同乘 q，得到式子 $qS_n = a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n$②。（教师将式子 ② 板书在式子 ① 下方，并错位对齐）

提问 3：观察 ① 式和 ② 式，它们之间有什么关系？

教师引导学生得出结论：① 式和 ② 式右边有很多相同的项，可以通过相减消去相同的项。教师板书 ① - ②，同时安排学生自己在纸稿上一同计算，得出式子 $(1 - q)S_n = a_1(1 - q^n)$。教师接着板书得出前 n 项和公式 $S_n = \dfrac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$③。

提问 4：解出的前 n 项和公式正确吗？是否需要补充一些条件？

教师随机叫学生回答，引出在转化式子 $(1 - q)S_n = a_1(1 - q^n)$ 时，将 $1 - q$ 默认为不等于零了，所以要对式子 ③ 补充条件，正确的求和公式是 $S_n = \dfrac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}(q \neq 1)$④。

提问 5：当 $q = 1$ 时，S_n 等于什么呢？

引导学生思考当 $q = 1$ 时的情况，得出结论，当 $q = 1$ 时，$S_n = na_1$。

提问 6：已知 a_1, q, n 可以使用公式 ④ 求和，若已知 a_1, q, a_n 时该如何求和呢？尝试将 ④ 式转化为只包含 a_1, q, a_n 的形式。

师生共同总结：等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式为 $S_n = \begin{cases} na_1, & q = 1, \\ \dfrac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \dfrac{a_1 - a_nq}{1 - q}, & q \neq 1。 \end{cases}$

2020年下半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力试题(高级中学)参考答案及解析

一、单项选择题

1.【答案】A。解析:利用重要极限,$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^{\frac{3}{2}}\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\left(x^{\frac{1}{2}}\sin\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{x}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to0}x^{\frac{1}{2}}\sin\dfrac{1}{x}$。因为当$x\to0$时,$x^{\frac{1}{2}}$是无穷小量,$\sin\dfrac{1}{x}$是有界量,所以$\lim\limits_{x\to0}x^{\frac{1}{2}}\sin\dfrac{1}{x}=0$。故本题选A。

2.【答案】D。解析:将$x=1$代入方程$xyz=1$,得$yz=1$,这是一个双曲线。故本题选D。

3.【答案】D。解析:矩阵$\boldsymbol{A}$的行向量组的极大线性无关组所含向量的个数,即矩阵$\boldsymbol{A}$的行秩。对矩阵$\boldsymbol{A}$作初等变换化成阶梯形矩阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&3&5&7\\3&5&7&1\\5&7&1&3\\7&1&3&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&5&7\\0&1&2&5\\0&1&3&4\\0&5&8&11\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&5&7\\0&1&2&5\\0&0&1&-1\\0&0&-2&-14\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&5&7\\0&1&2&5\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix}。$$

矩阵的秩等于矩阵的行秩,因此,矩阵$\boldsymbol{A}$的行秩为4。故本题选D。

4.【答案】A。解析:由直线方程与平面方程可知,直线过点$(-3,-4,0)$,且一个方向向量为$\boldsymbol{m}=(-2,-7,3)$;平面的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(4,-2,-2)$。因为$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=(-2)\times4+(-7)\times(-2)+3\times(-2)=0$,所以$\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$,又点$(-3,-4,0)$不在平面$4x-2y-2z=3$上,所以直线与平面平行。故本题选A。

5.【答案】B。解析:因为$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$,所以$f(x)$在$x=0$处连续;因为$\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta x\sin\dfrac{1}{\Delta x}=0$,所以函数$f(x)$在点$x=0$处可导,且$f'(0)=0$;因为当$x\neq0$时,$f'(x)=\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)'=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$,而极限$\lim\limits_{x\to0}f'(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right)$不存在,所以$f(x)$的导函数在点$x=0$处不连续;因为极限$\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f'(0+\Delta x)-f'(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\left(2\sin\dfrac{1}{\Delta x}-\dfrac{1}{\Delta x}\cos\dfrac{1}{\Delta x}\right)$不存在,所以$f(x)$在$x=0$处不存在二阶导数。故本题选B。

6.【答案】C。解析:连接坐标原点O与点M。由于PM与球面相切于点M,所以$\triangle OPM$是直角三角形,于是$OP=\sqrt{OM^2+PM^2}$,又由球面方程知,球面半径为1,所以$OM=1$,再结合题中条件$PM=2\sqrt{2}$,$OP=|z|$,得$|z|=\sqrt{1^2+(2\sqrt{2})^2}=3$。故本题选C。

7.【答案】B。解析:《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》指出,高中数学教学以发展学生数学学科核心素养为导向,数学学科核心素养包括:数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析。在本题中,已知角θ,求$\cos2\theta$,显然是一个求值问题,突出考查学生的数学运算素养,具体表现为运算求解能力。故本题选B。

8.【答案】A。解析:《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》提到,在学习平面向量的基础上,经历由平面向量推广到空间向量的过程,因而立体几何中的向量方法是平面几何中的向量方法的推广,因此(1)是“推广”;几何中的向量方法与几何中的代数方法完全一致,不同的只是用“向量与向量的运算”来代替“数与数的运算”,几何中的向量方法可以简单地表述为“【形到向量】→【向量的运算】→【向量和数到形】”,几何中的代数方法可以简单地表述为“【形到数】→【数的运算】→【数到形】”,这两种方法是类比的关系,因此(2)是“类比”;平面几何中的向量方法是在数轴与向量概念的基础上,为解决物理、数学中的问题而发展的

运算体系，因而数轴与向量是平面几何中的向量方法的特殊化，因此(3)是“特殊化”。故本题选A。

二、简答题

9.【参考答案】

(1) 利用基本不等式$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}(a>0,b>0)$，

$$\frac{e^{x_1}+e^{x_2}+e^{x_3}+e^{x_4}}{4}=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{x_1}+e^{x_2}}{2}+\frac{e^{x_3}+e^{x_4}}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2}\left(\sqrt{e^{x_1}\cdot e^{x_2}}+\sqrt{e^{x_3}\cdot e^{x_4}}\right)=\frac{e^{\frac{x_1+x_2}{2}}+e^{\frac{x_3+x_4}{2}}}{2}$$

$$\geqslant \sqrt{e^{\frac{x_1+x_2}{2}}\cdot e^{\frac{x_3+x_4}{2}}}=e^{\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}}。$$

(2) 利用基本不等式$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}(a>0,b>0)$，

$$\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}=\frac{1}{2}\left(\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{y_3+y_4}{2}\right) \geqslant \frac{\left(\sqrt{y_1y_2}+\sqrt{y_3y_4}\right)}{2} \geqslant \sqrt{\sqrt{y_1y_2}\cdot\sqrt{y_3y_4}}=\sqrt[4]{y_1y_2y_3y_4}。$$

10.【参考答案】

(1) 已知矩阵$\boldsymbol{A}_{3\times4}$的秩等于3，所以齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系的解的个数为$4-r(\boldsymbol{A}_{3\times4})=1$，又$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的两个不同的解，所以向量$(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个非零解，于是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的通解为$k(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)$，$k$为任意常数。

(2) 由(1)知，非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的导出组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的通解为$k(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)$，结合$\boldsymbol{\eta}_1$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的一个特解，得$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的通解为$k(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)+\boldsymbol{\eta}_1$，$k$为任意常数。

11.【参考答案】

已知泊松分布的概率分布为$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}(k=0,1,2,\cdots)$，则$E(X)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}$，根据泰勒展开式：$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}$，得$E(X)=\lambda e^{-\lambda}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda$。

12.【参考答案】

① 函数是高中数学的重要内容之一，与函数相关的内容在高中课程中占有很大的比例，如函数的定义和性质，基本初等函数，导数等，函数概念及其反映出的数学思想方法广泛渗透到数学的各个领域，是进一步学习数学的重要基础。

② 函数贯穿于整个高中数学课程，特别是在方程、数列、不等式、随机变量等内容中都突出地体现了函数思想。用函数的思想和观点去研究这些内容，可以帮助我们更好地理解这些知识本身和解决相关问题。例如，用函数的观点看方程，可以把方程的根看成是函数与x轴交点的横坐标，即函数的零点；数列是定义域为自然数集或自然数子集的一类特殊的函数，研究数列的性质可以转化为研究这类函数的性质；用函数的观点看，不等式是确定使函数$y=f(x)$在x轴上方或下方的x的区域，这样我们就可以利用函数图像来求解不等式；随机变量是定义在样本空间上的实值函数，是一类特殊的函数。

综上所述，函数是普通高中数学课程的一条主线，它连接起了高中数学课程的许多内容。

13.【参考答案】

数学运算是指在明晰运算对象的基础上，依据运算法则解决数学问题的素养。主要包括：理解运算对象，掌握运算法则，探究运算思路，选择运算方法，设计运算程序，求得运算结果等。

三、解答题

14.【参考答案】

（1）若 $OP = x_0$，则光线从点 A 到达点 P 的时间为 $T_1(x_0) = \frac{x_0}{c\sin\theta}$；光线从点 P 到达点 B 的时间为 $T_2(x_0) = \frac{l - x_0}{c'\sin\theta'}$，从而光线从点 A 到达点 B 所需的时间为 $T(x_0) = T_1(x_0) + T_2(x_0) = \frac{x_0}{c\sin\theta} + \frac{l - x_0}{c'\sin\theta'}$。

（2）在水面上取一点 P'，设 $OP' = x(0 < x < l)$，则光线从点 A 到达点 P' 的时间为 $T_1(x) = \frac{x}{c\frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}}} = \frac{\sqrt{x^2 + h_1^2}}{c}$；光线从点 P' 到达点 B 的时间为 $T_2(x) = \frac{l - x}{c'\frac{l - x}{\sqrt{(l - x)^2 + h_2^2}}} = \frac{\sqrt{(l - x)^2 + h_2^2}}{c'}$，从而光线沿 $A - P' - B$ 从 A 点到达 B 点所需的时间为 $T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + h_1^2}}{c} + \frac{\sqrt{(l - x)^2 + h_2^2}}{c'}$。

由于 $T(x_0)$ 为光线从点 A 到达点 B 时间的极小值，所以由费马定理知，$T'(x_0) = \frac{x_0}{c\sqrt{x_0^2 + h_1^2}} - \frac{l - x_0}{c'\sqrt{(l - x_0)^2 + h_2^2}} = 0$。注意到，$\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + h_1^2}} = \sin\theta$，$\frac{l - x_0}{\sqrt{(l - x_0)^2 + h_2^2}} = \sin\theta'$，所以 $T'(x_0) = \frac{\sin\theta}{c} - \frac{\sin\theta'}{c'} = 0$，即有 $\frac{\sin\theta}{\sin\theta'} = \frac{c}{c'}$。

四、论述题

15.【参考答案】

数据分析是指针对研究对象获取数据，运用数学方法对数据进行整理、分析和推断，形成关于研究对象认识的素养。

① 培养学生的数据分析能力，能使其形成严谨的逻辑思维能力。在数据分析过程中，渗透分类思想、归纳思想、类比思想和统计思想等数学思想方法，能促进学生思维能力、实践能力和创新意识的发展。

② 培养学生的数据分析能力，能使其提升数学实际应用能力。数据分析涉及生活各方面，学生在获取有价值信息并进行定量分析时，能增强基于数据表达现实问题的意识，形成通过数据认识事物的思维品质，积累依托数据探索事物本质、关联和规律的活动经验。

③ 培养学生的数据分析能力，使其掌握必要的知识技能，是时代发展的要求。数据分析是研究随机现象的重要数学技术，是大数据时代数学应用的主要方法，也是“互联网 +”相关领域的主要数学方法。从学生时代培养起来的数据分析能力对学生今后的学习和发展有重要的意义。

五、案例分析题

16.【参考答案】

（1）情境 1 是一个生活中的问题，学生可以通过审题、分析、讨论，将问题归结为比较 pq 与 $\left(\frac{p + q}{2}\right)^2$ 的大小，进而与本节课学习的基本不等式建立联系。教师通过现实生活中商店打折促销的例子创设情境，贴近生活实际，将教材内容与生活情境有机结合起来，学生能够体会到生活中充满了数学，感受到数学无处不在，从而增强学好数学的信心。

情境 2 是一个物理问题，学生需要先解决这个物理问题，根据初中物理知识杠杆平衡原理计算得到 $m = \sqrt{m_1 m_2}$（其中 m 表示物体的真实质量，m_1 和 m_2 表示题目中的两次称量结果），将问题归结为比较 $\sqrt{m_1 m_2}$ 与 $\frac{m_1 + m_2}{2}$ 大小问题，进而与本节课学习的基本不等式建立联系。教师通过数学应用性问题创设情境，将数学问

题深加工，建立一种物理问题的模型，让学生经历一个观察、联想、抽象、概括、数学化的过程，这不仅能激发学生的兴趣，还能提高学生分析、解决问题的能力。但是，创设物理问题情境需要学生有扎实的物理知识，不然很容易影响学生对于问题的探究，不利于接下来的教学实施。

(2) 实施高中数学情境教学时应注意以下问题。

① 情境创设应有明确的目的性。要求情境创设要从教学内容出发，充分展现教材重点、难点、疑点和关键点及知识的形成过程和框架结构。

② 情境创设要有启发性。要求创设的情境能够激发学生的想象力，或者能够引发学生相应的情感体验，以诱发思维，促进学生创新意识的发展。

③ 情境创设应合理、适当。教师在创设情境时，应认真研究情境是否合理，并不是每节课都适合创设情境，也不是任何情境都能提高教学效果。

④ 情境创设应以“教为主导，学为主体”。从问题的提出到解决，始终以学生为主，让学生观察、分析、讨论，教师适时点拨，学生归纳，解决问题。

⑤ 情境创设应符合学生的认知，所提的问题应是深浅适当的、是学生熟悉的。应在最近发展区内，是学生通过分析、探索能够解决的。

六、教学设计题

17.【参考答案】

(1) 教学重点：渗透二分法思想，掌握用二分法求方程近似解的一般步骤。

(2) 教学设计

一、复习导入

复习函数零点定义及零点存在定理。

出示问题：已知函数$f(x) = \ln x + 2x - 6$在区间$(2,3)$内存在一个零点，如何求出这个零点？

【设计意图】通过复习函数零点的定义及零点存在定理为本节课的教学打下理论基础；用一个数学问题进行导入，能够引发学生的思考，激发学生的学习兴趣。

二、探索新知

问题1：用计算器计算$f(2.5)$的值，得出的结果是多少？

进一步提问：函数零点应该在区间$(2,2.5)$内还是$(2.5,3)$内？

预设：学生通过计算发现$f(2.5) \approx -0.084 < 0$，根据零点存在定理，由$f(2.5)f(3) < 0$，得出零点应该在区间$(2.5,3)$。

教师讲解：一般地，称$x = \dfrac{a+b}{2}$为区间(a,b)的中点，我们可以通过“取中点”的方法，快速缩小零点所在的范围。

问题2：零点所在的下一个更小的区间是什么？

让学生用计算器，通过取中点的方法，确定零点所在的更小的区间，不断重复此过程，并将结果填写在相应的表格中。

问题3：什么时候可以停止计算？

学生自主思考，教师进行引导后讲解：在重复上述操作后，零点的范围不断缩小，这时，在一定的精确度要求下，可以将区间端点作为零点的近似值。例如：当精确度要求为ε时，即可得到一个对应的区间(c,d)，当满足$|c-d| < \varepsilon$时，区间(c,d)内的任何一个值都是满足精确度要求的近似值，一般地，我们取区间端点值为近似值。

顺势给出二分法定义：对于在区间$[a,b]$上连续，且$f(a) \cdot f(b) < 0$的函数$y = f(x)$，通过不断地把函数$f(x)$的零点所在的区间一分为二，使区间的两个端点逐步逼近零点，进而得到零点近似值的方法叫作二分法。

让学生合作探究，总结用二分法求函数零点近似值的一般步骤。

【设计意图】通过动手操作，学生可以提高动手操作能力，熟悉计算器的使用，增加直接活动经验，另一方面通过不断地计算，学生感受近似值的精确度不断提高，可以加深学生对知识的理解。

三、巩固提升

借助计算器用二分法求函数$f(x) = 2^x + 3x - 7$零点的近似值。（精确度0.1）

【设计意图】利用习题不仅可以提升学生对于信息技术的熟练度，还可以加深学生对二分法核心思想的理解，巩固用二分法求解函数零点的一般步骤。

（3）该方案应用建构主义的数学学习理论，引导学生积极参与到探索、发现、讨论、交流的学习活动中去，使课堂教学成为学生亲自参与的生动活泼的数学思想场所。通过问题的引导使学生自然地经历知识的形成过程。使用该方案教学，教师需要根据学生的活动情况进行恰当的提问引导和总结讲解，对教师的综合素质要求较高，教师在课堂授课过程中需要按照新课标的理念，从培养学生的综合素质出发，扮演好课堂活动组织者、引导者、合作者的角色，做到到位而不越位，充分利用多媒体和信息技术，与时俱进地提升学生的数学素养。

2019年下半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力试题(高级中学)参考答案及解析

一、单项选择题

1.【答案】A。**解析:**因为$f(x)$在$x=0$处可导,所以$f(x)$在$x=0$处连续,则有$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$,即$\lim\limits_{x\to0^-}e^{ax}=1=b$。$f(x)$在$x=0$处可导,则$f(x)$在$x=0$处的左导数等于右导数,$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^{ax}-1}{x}=af'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1+\sin2x-1}{x}=2$,即$a=2$。故本题选A。

2.【答案】A。**解析:**函数$f(x)$的一阶导函数在$x=0$处连续,则$f'(0)$存在,且$\lim\limits_{x\to0}f'(x)=f'(0)$。由导数定义知,$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}x^{n-1}\sin\dfrac{1}{x}$,当$n\leqslant1$时,极限$\lim\limits_{x\to0}x^{n-1}\sin\dfrac{1}{x}$不存在,与题设矛盾,故应有$n\geqslant2$,此时$\lim\limits_{x\to0}x^{n-1}\sin\dfrac{1}{x}=0$。因为当$x\neq0$时,$f(x)=x^n\sin\dfrac{1}{x}$,$f'(x)=nx^{n-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{n-2}\cos\dfrac{1}{x}$,所以$\lim\limits_{x\to0}f'(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(nx^{n-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{n-2}\cos\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}nx^{n-1}\sin\dfrac{1}{x}-\lim\limits_{x\to0}x^{n-2}\cos\dfrac{1}{x}=-\lim\limits_{x\to0}x^{n-2}\cos\dfrac{1}{x}$,而当$n=2$时,极限$\lim\limits_{x\to0}x^{n-2}\cos\dfrac{1}{x}$不存在,此时一阶导函数在$x=0$处间断;当$n\geqslant3$时,$-\lim\limits_{x\to0}x^{n-2}\cos\dfrac{1}{x}=0=f'(0)$,此时一阶导函数在$x=0$处连续。综上,正整数$n$的取值是$n\geqslant3$。故本题选A。

3.【答案】B。**解析:**因为M_1M_2垂直于平面π_1,所以$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{M_1M_2}=(0,1,1)$是平面$\pi_1$的一个法向量,又平面$\pi_2$的一般方程为$6x+y+18z-18=0$,所以$\boldsymbol{m}=(6,1,18)$是平面$\pi_2$的一个法向量。记平面$\pi_1$与平面$\pi_2$的夹角为$\theta$,则$\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|0\times6+1\times1+1\times18|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}\times\sqrt{6^2+1^2+18^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,$\theta=\dfrac{\pi}{4}$。故本题选B。

4.【答案】C。**解析:**由题知$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,所以$\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$,$\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})$,分别代入$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,得$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})=-(\boldsymbol{0}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$;$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times[-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})]=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})=-(\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$。故本题选C。

5.【答案】D。**解析:**矩阵的秩等于其行向量组的秩(行秩),也等于其列向量组的秩(列秩),而向量组的秩等于这组向量的一个极大线性无关组中所含向量的个数。由$r(\boldsymbol{M})=r<n$知,矩阵$\boldsymbol{M}$的行向量组的一个极大线性无关组中含有r个向量,所以行向量中必有r个向量线性无关,且行向量组中任意一个向量都可以由这r个向量线性表出。但从行向量组中任取r个向量不一定能构成向量组的极大线性无关组,这r个向量可能线性相关,此时在向量组中至少存在一个向量不能被这r个向量线性表出。结合选项只有D项正确。

6.【答案】C。**解析:**关于直线$y=x$的反射变换是将平面上任意一点(x_0,y_0)映为(y_0,x_0),根据矩阵乘法可得,$\begin{bmatrix}y_0\\x_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}$,所以关于直线$y=x$的反射变换是$\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$。故本题选C。

7.【答案】D。**解析:**向量具有代数和几何双重属性,是沟通代数、几何的桥梁,是重要的数学模型。在高中阶段学习向量有助于学生体会数学与现实生活以及其他学科的联系,有助于学生理解数学运算的意义及价值,发展运算能力,有助于学生掌握处理几何问题的代数方法,体会数形结合思想,有助于增进学生对数学本质的理解,向量是解决数学问题的有效工具,向量知识的学习能提高学生的解题能力,向量在高中课程中有着广泛的实际应用价值。

8.【答案】B。**解析**:数学中常用的推理有演绎推理、归纳推理和类比推理,其中归纳推理和类比推理都属于合情推理。合情推理是根据已有的事实和正确的结论(包括定义、公理、定理等)、实验和实践的结果,以及个人的经验和直觉等推测某些结果的推理。演绎推理是根据已有的事实和正确的结论(包括定义、公理、定理等),按照严格的逻辑法则得到新结论的推理。数学归纳法是一种数学证明方法,通常被用于证明某个给定命题在整个(或者局部)自然数范围内成立。虽然数学归纳法名字中有"归纳",但是数学归纳法的推理方式并不属于归纳推理,它属于完全严谨的演绎推理。事实上,所有数学证明的推理方式都属于演绎推理。故本题选 B。

二、简答题

9.【参考答案】

(1) 任取平面上的一点(x,y),设(x,y) 在题中变换下的像为(x',y'),则有$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}x+3\\\frac{1}{3}y+5\end{bmatrix}$,即$\begin{cases}x'=\frac{1}{2}x+3,\\y'=\frac{1}{3}y+5,\end{cases}$则有$\begin{cases}x=2(x'-3),\\y=3(y'-5),\end{cases}$代入椭圆方程得$\frac{4(x'-3)^2}{4}+\frac{9(y'-5)^2}{9}=(x'-3)^2+(y'-5)^2=1$。故椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 在题中变换下的曲线方程为$(x-3)^2+(y-5)^2=1$。

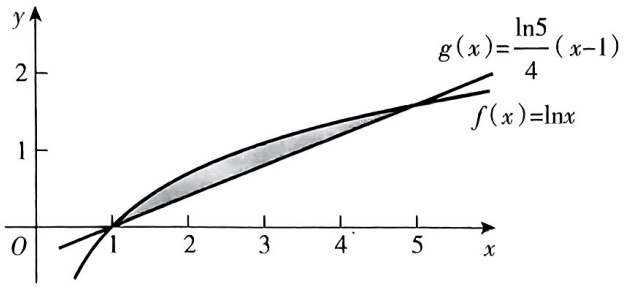
(2) 平面内任意两点的距离都可通过平移转化为原点到对应点(x,y) 的距离,不妨取原点$(0,0)$ 与点$(2,3)$。由(1) 可得,$(0,0)$ 在题中变换下的像为$(3,5)$,$(2,3)$ 在题中变换下的像为$(4,6)$,记两点在变换前的距离为 d,变换后的距离为 d',则 $d=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$,$d'=\sqrt{(4-3)^2+(6-5)^2}=\sqrt{2}$,显然在该变换下平面内两点的距离发生变化。

平面内任意直线(斜率存在) 都可以通过平移转化为过原点的直线 $y=kx$。若 $k=0$,由(1) 可得,直线 $y=0$ 在题中变换下的方程为 $3(y'-5)=0$,即 $y=5$,斜率仍为 0;若 $k\neq0$,不妨令 $k=\frac{3}{2}$,直线 $y=\frac{3}{2}x$ 在题中变换下的方程为 $3(y'-5)=\frac{3}{2}\times2(x'-3)$,即 $y=x+2$,斜率为 1。综上,在题中变换下斜率为 0 的直线的斜率不发生变化,斜率不为 0 的直线的斜率发生变化。

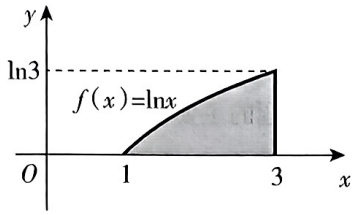
平面内两条相交直线,不妨取直线 $y=0$ 与直线 $y=\frac{3}{2}x$,两直线相交于原点。$y=0$ 在题中变换下的方程为 $y=5$,$y=\frac{3}{2}x$ 在题中变换下的方程为 $y=x+2$,变换后的两直线斜率不相等,因此变换后的两直线相交,故题中变换不改变直线间的相交关系。

10.【参考答案】

(1) 函数 $f(x)=\ln x$ 与函数 $g(x)=\frac{\ln5}{4}(x-1)$ 的大致图像如图所示,图中两交点坐标为 $(1,0)$,$(5,\ln5)$,阴影部分的面积即为题中所求的面积。由定积分的几何应用可知,所围平面图形的面积 $S=\int_1^5\left[\ln x-\frac{\ln5}{4}(x-1)\right]dx=\int_1^5\ln x\,dx-\int_1^5\frac{\ln5}{4}(x-1)\,dx=x\ln x\Big|_1^5-\int_1^5 1\,dx-\frac{\ln5}{4}\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\Big|_1^5=5\ln5-4-2\ln5=3\ln5-4$。



(2) 画出平面图形 $0 \leqslant y \leqslant f(x)(1 \leqslant x \leqslant 3)$,如图中阴影部分所示。



(方法一) 取 y 为积分变量。由 $f(x) = \ln x(1 \leqslant x \leqslant 3)$,可得 $x = e^y(0 \leqslant y \leqslant \ln 3)$。曲边梯形 $0 \leqslant x \leqslant e^y(0 \leqslant y \leqslant \ln 3)$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转体记为 Ω_1,根据旋转体体积公式,得 $V_{\Omega_1} = \int_0^{\ln 3} \pi (e^y)^2 dy = 4\pi$;矩形 $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 3, \\ 0 \leqslant y \leqslant \ln 3 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转体记为 V_{Ω_2},它是底面半径为 3,高为 ln3 的圆柱体,$V_{\Omega_2} = \pi \cdot 3^2 \cdot \ln 3 = 9\pi \ln 3$。易知所求旋转体的体积 $V = V_{\Omega_2} - V_{\Omega_1} = (9\ln 3 - 4)\pi$。

(方法二) 取 x 为积分变量。取平面图形 $f(x) = \ln x(1 \leqslant x \leqslant 3)$ 的一个面积微元 $dS = \ln x dx$,该微元绕 y 轴旋转一周得到一个空心圆柱体,该空心圆柱体展开后近似地可以看成是一段长方体,它的长为 $2\pi x$,宽为 dx,高为 $f(x)$,所以空心圆柱体的体积近似为 $2\pi x \cdot f(x) \cdot dx = 2\pi x \ln x dx$,即为旋转体体积的微元。所以所求旋转体的体积 $V = \int_1^3 2\pi x \ln x dx = \pi \int_1^3 \ln x dx^2 = \pi\left(x^2 \ln x \Big|_1^3 - \frac{1}{2}x^2 \Big|_1^3\right) = (9\ln 3 - 4)\pi$。

11.【参考答案】

取 5 次球,最多取到 3 个白球的对立事件是取到 4 个白球或 5 个白球。设取到白球的数量为 X,则 $P(X = 4) = \frac{C_8^4 C_8^1}{C_{16}^5} = \frac{5}{39}$,$P(X = 5) = \frac{C_8^5}{C_{16}^5} = \frac{1}{78}$,故所求概率 $P(X \leqslant 3) = 1 - \frac{5}{39} - \frac{1}{78} = \frac{67}{78}$。

12.【参考答案】

数学文化在数学教学中主要有两方面的含义:一是体现数学外部和内部联系的事物,如与数学知识相关的数学史、数学家、数学在日常生活中的应用等;二是蕴含于数学知识的形成和应用过程中的意识形态和精神领域的因素,如数学思想、方法、精神、数学美等。数学课程中,数学文化与数学教学密不可分,以“勾股定理”和“‘杨辉三角’与二项式系数”的教学为例进行简要的阐述。

① 勾股定理

教师在讲授“勾股定理”一课时,介绍了毕达哥拉斯发现勾股定理的趣事:相传 2500 多年前,毕达哥拉斯有一次在朋友家做客时,发现朋友家用砖铺成的地面图案反映了直角三角形三边的某种数量关系。由此引入“勾股定理”的探究活动:引导学生结合正方形面积自主探究直角三角形三条边的关系。最后得到“勾股定理”。教师在讲授新课前向学生渗透相关数学史的过程就是数学教学中融入数学文化的充分体现,同时对直角三角形三边关系的探究活动蕴含了丰富的数学思想、方法,也是将数学文化融入数学课堂的体现。

②“杨辉三角”与二项式系数

教师在讲授二项式系数的性质 $C_{n+1}^r = C_n^{r-1} + C_n^r$ 时,介绍法国数学家帕斯卡发现的“帕斯卡三角”以及中国数学家杨辉在《详解九章算法》中的“杨辉三角”的相关数学史,向学生渗透相关数学文化。此外,在教学过程中引导学生从函数的角度对二项式系数进行分析,即将 C_n^r 看成是定义域为 $\{0,1,2,\cdots,n\}$,以 r 为自变量的函

数$f(r)$，对确定的n画出函数图像，以此探究二项式系数的相关性质。这一教学过程向学生渗透数形结合的思想，也是数学文化在数学课程中的体现。

13.【参考答案】

数学建模是对现实问题进行数学抽象，用数学语言表达问题、用数学方法构建模型解决问题的素养。数学建模过程主要包括：在实际情境中从数学的视角发现问题、提出问题，分析问题、构建模型，确定参数、计算求解，检验结果、改进模型，最终解决实际问题。具体分析如下。

（1）发现问题、提出问题：发现现实生活中的问题，通过搜集相关信息，了解所要研究的生活实际问题的背景，对问题进行简单明了的假设。

（2）分析问题、构建模型：对问题进行全面分析，利用数学语言将现实问题抽象成数学问题，合理利用各种数学思想方法和数学工具建立一个简单而有相当实际意义的数学模型。

（3）确定参数、计算求解：抓住可以解决问题的主要因素，确定想要关注的变量，采用数学方法或计算机技术对模型相关参数进行求解，并据此分析结果。

（4）检验结果、改进模型：通过将模型所得结果与实际现象或数据进行比较，确定结果是否具有实际意义，对结果做出科学理性的评价；若模型与现实不符，则思考建模过程中有哪些因素未考虑或考虑不恰当，对此应予以修改或补充假设，重新建模。

三、解答题

14.【参考答案】

证明：因为$f(a)\cdot f(b)<0$，所以$f(a)$与$f(b)$异号，不妨令$f(a)<0,f(b)>0$。记$a_0=a,b_0=b$，若$f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)=0$，则命题得证；若$f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)>0$，则令$a_1=a_0,b_1=\frac{a_0+b_0}{2}$；若$f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)<0$，则令$a_1=\frac{a_0+b_0}{2},b_1=b_0$，以此类推可得两个序列$\{a_n\},\{b_n\}$，满足$[a_n,b_n]\subset[a_{n-1},b_{n-1}]$，即$\{[a_n,b_n]\}$是一个闭区间套，且$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n-b_n|=\frac{b-a}{2^n}=0,f(a_n)<0,f(b_n)>0$，所以由闭区间套定理可知，存在一点$c\in[a,b]$，有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=c$。又$f(x)$在$[a,b]$上连续，所以有$f(c)=\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)\leqslant 0,f(c)=\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)\geqslant 0$，即$f(c)=0$，命题得证。

四、论述题

15.【参考答案】

数学课程应注重提高学生的数学思维能力，这是数学教育的基本目标之一。在数学的学习过程中，要不断地经历直观感知、观察发现、归纳类比、空间想象、抽象概括、符号表示、运算求解、数据处理、演绎证明、反思与建构等思维过程。这些过程是数学思维能力的具体体现，有助于学生对客观事物中蕴涵的数学模式进行思考和做出判断。因此，在数学教学中应有意培养学生的数学思维能力。

培养学生的数学思维能力可以从以下几个方面入手。

（1）设立恰当的教学目标，明确培养方向。

教师要深刻把握课堂教学要求，结合所讲授的知识内容，制定教学设计中的过程与方法目标，从而明确在教学过程中应培养的学生的思维能力。

（2）精心设计教学方案，注重创设生动的问题情境和组织富有趣味性的探究活动。

在教学之前教师应精心准备教学设计，对相关知识设计生动的问题情境，引导学生自主思考问题。此外，教师的设问要富有启发性和层次性，由浅入深，由简到难，符合学生的认知和思维过程。同时结合教学目标，设计富有趣味性的探究活动，在这一过程中培养学生应具备的数学思维。

（3）在教学过程中，培养学生的合情推理和演绎推理的能力。

中学数学中几何证明等很多知识的学习都要结合推理进行探究。推理能力是数学思维能力的体现。因此，在数学教学中，教师应鼓励学生运用合情推理，大胆猜想，之后引导学生运用演绎推理的相关方法对猜想

进行证明。在这一过程中，教师既要向学生渗透相应的数学思想，还应引导学生运用正确、适当的数学思想解决相应数学问题。

（4）在作业中设计灵活多元的练习，锻炼学生的思维能力。

教师要根据具体教学内容对作业的内容和形式进行改革和创新，融入更多富有趣味性、探索性的元素，让学生在课后习题的练习中，既可以巩固所学的课堂知识，又能够对课堂知识进一步拓展延伸，从而达到启发学生的思维，激发其学习兴趣的目的。

五、案例分析题

16.【参考答案】

（1）该学生没有考虑直线 l 的斜率不存在的情况。可能出现的原因有以下几点：

① 该学生忽略了直线点斜式方程的局限性（点斜式方程不能表示斜率不存在的直线）；

② 该学生对分类讨论思想的运用不熟练；

③ 该学生对圆与直线的位置关系考虑得不全面。

正确解法如下（这里给出三种解法）：

解法一

① 当直线 l 的斜率不存在时，根据题意所求直线 l 的方程为 $x = 2$；

② 当直线 l 的斜率存在且设为 k 时，其方程为 $y - 3 = k(x - 2)$，即 $kx - y - 2k + 3 = 0$，根据题意知，圆心 O 到直线 l 的距离 $d = \dfrac{|k - 2k + 3|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1$，解得 $k = \dfrac{4}{3}$，进而可得所求直线 l 的方程为 $4x - 3y + 1 = 0$。

综上，所求直线 l 的方程为 $x = 2$ 或 $4x - 3y + 1 = 0$。

解法二

① 当直线 l 的斜率不存在时，根据题意所求直线 l 的方程为 $x = 2$；

② 当直线 l 的斜率存在且为 k 时，其方程为 $y - 3 = k(x - 2)$，将直线和圆的方程联立：$\begin{cases}(x - 1)^2 + y^2 = 1,\\ y - 3 = k(x - 2),\end{cases}$ 消去 y 得 $(1 + k^2)x^2 + (-4k^2 + 6k - 2)x + 4k^2 - 12k + 9 = 0$，由于直线和圆相切，所以令 $\Delta = 0$，得到 $(-4k^2 + 6k - 2)^2 - 4(1 + k^2)(4k^2 - 12k + 9) = 0$，解得 $k = \dfrac{4}{3}$，所以直线 l 的方程为 $4x - 3y + 1 = 0$。

综上，所求直线 l 的方程为 $x = 2$ 或 $4x - 3y + 1 = 0$。

解法三

① 当直线 l 的斜率不存在时，根据题意易知直线 l 的方程为 $x = 2$；

② 当直线 l 的斜率存在且为 k 时，由圆 O 的方程知，圆 O 的圆心为 $(1,0)$，半径为 1，圆心到点 $P(2,3)$ 的距离为 $\sqrt{(2 - 1)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{10}$，由勾股定理得，点 P 到直线与圆 O 切点的距离为 $\sqrt{10 - 1} = 3$，设切点为 (x_0, y_0)，则可列方程组 $\begin{cases}(x_0 - 1)^2 + y_0^2 = 1,\\ (x_0 - 2)^2 + (y_0 - 3)^2 = 9,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_0 = \dfrac{1}{5},\\ y_0 = \dfrac{3}{5}.\end{cases}$ 进而可求得直线 l 的方程为 $\dfrac{y - 3}{x - 2} = \dfrac{\frac{3}{5} - 3}{\frac{1}{5} - 2}$，整理得 $4x - 3y + 1 = 0$。

综上，所求直线 l 的方程为 $x = 2$ 或 $4x - 3y + 1 = 0$。

（2）针对本题，结合案例中学生出现的错误，教师应该根据该题的教学步骤，在教学过程中，采取相应策略设置问题。下面结合教学过程进行分析：

① 教师与学生一起回忆旧知，提出问题，“过圆外一点能作几条圆的切线”。

② 教师结合本题让学生画出该题相关的图像，设置问题引导学生全面考虑直线 l 的位置，如“直线 l 与圆相切有几种情况？”

③ 教师通过提问引导学生复习直线斜率的存在情况，如“直线斜率存在时，对应图像是什么样子，不存在时如何表示？”

④ 教师结合本题引导学生根据直线斜率的存在情况运用分类讨论思想解题，可设置问题如“当斜率存在时，直线 l 的方程如何求得？当斜率不存在时，直线 l 的方程是什么？”

六、教学设计题

17.【参考答案】

（1）教学重点

① 结合瞬时变化率，了解导数概念的实际背景；

② 理解导数的概念及其几何意义；

③ 能准确表达某一点处导数的定义；

④ 掌握从定义出发求某一点的导数的计算。

（2）教学过程

一、新知导入

创设问题情境：经调查发现，在高台跳水中，运动员相对于水面的高度 h（单位：m）与起跳后的时间 t（单位：s）存在的函数关系为 $h(t) = -4.9t^2 + 6.5t + 10$，如果用运动员在某段时间内的平均速度 $\bar{v}$ 描述其运动状态，那么在 $1 \leqslant t \leqslant 2$ 这段时间里，$\bar{v}$ 的值是多少？

预留时间让学生利用旧知进行求解，之后教师订正：$\bar{v} = \dfrac{h(2) - h(1)}{2 - 1} = -8.2(\text{m/s})$。

教师明确“平均变化率”的定义（课件展示）：

① 若将题目中的函数关系用 $y = f(x)$ 表示，那么问题中的变化率即为 $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$，称此式为函数 $y = f(x)$ 从 x_1 到 x_2 的平均变化率。

② 一般习惯用 Δx 表示 $x_2 - x_1$，即 $\Delta x = x_2 - x_1$，可把 Δx 看作相对于 x_1 的一个增量，用 $x_1 + \Delta x$ 代替 x_2，类似用 Δy 表示 $f(x_2) - f(x_1)$，则平均变化率可以表示为 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$。

回归课件中的问题背景，教师提出如下问题供学生思考。

教师提问 1：运动员在这段时间里是静止的吗？

教师提问 2：你认为用平均速度描述运动员的运动状态有什么问题吗？

【设计意图】教师在课堂开始时创设与生活实际相关的问题情境供学生思考讨论，可以激发学生学习新知的兴趣，活跃课堂气氛；物理学科中的平均速度与平均变化率密切相关，教师借此明确平均变化率的概念，一方面可以帮助学生建立起知识之间的联系，另一方面可以为新知的教学做铺垫。

二、新知讲授

教师指出：物理学科中将物体在某一时刻的速度称为瞬时速度。高台跳水中，运动员在不同时刻的速度是不同的，所以平均速度不一定能反映其在某一时刻的瞬时速度。

教师提问：如何求跳水运动员的瞬时速度呢？$t = 2$ 时，跳水运动员的瞬时速度是多少呢？

活动 1：学生自主思考，小组合作交流，教师巡视，并做如下引导。

教师引导 1：如果用包含变量 Δt 的式子分别表示在区间 $[2 + \Delta t, 2]\ (\Delta t < 0)$ 和 $[2, 2 + \Delta t]\ (\Delta t > 0)$ 上的 $\bar{v}$，$\bar{v}$ 可以表示成什么形式？

教师引导 2：对 Δt 分别取 ± 0.01，± 0.001，± 0.0001，± 0.00001，分别得到对应的 $\bar{v}$ 的值是什么？

教师引导 3：当 Δt 趋于 0 时，$\bar{v}$ 有什么样的变化趋势？

活动 2：结合上述引导，教师让学生分别形成区间 $[2 + \Delta t, 2]\ (\Delta t < 0)$ 和 $[2, 2 + \Delta t]\ (\Delta t > 0)$ 上 $\bar{v}$ 取值情况

的对应表格，小组讨论分析，教师巡视指导。

教师课件展示活动探究的表格，师生一起分析并得出结论：

① 无论 t 从小于 2 的一边，还是从大于 2 的一边趋近于 2，$\bar{v}$ 均趋近于 -13.1；

② 当 Δt 趋近于 0 时，平均速度均趋近于一个确定的值；

③ 从物理的角度看，时间间隔 $|\Delta t|$ 无限变小时，平均速度 $\bar{v}$ 无限趋近于 $t = 2$ 时的瞬时速度。

教师进一步提出如下问题，供学生思考讨论。

教师提问 1：运动员在某一时刻 t_0 的瞬时速度如何表示？

教师提问 2：函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的瞬时变化率如何表示？

教师引出“瞬时变化率”的定义：

一般地，函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的瞬时变化率是 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$。

教师进一步引入“导数”的定义：

我们称瞬时变化率为函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数，记作 $f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$，即

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}。$$

【设计意图】教师通过设问引导学生思考，将知识从“平均变化率”过渡到“瞬时变化率”，之后启发学生进行探究活动，最后带领学生共同分析，得出“平均变化率”和“瞬时变化率”的关系，明确“瞬时变化率”的概念，并借此引入导数的概念。思路清晰的教学过程，符合学生的认知，同时可以充分展现新课标“以学生为主体”的要求，也可以很好地提升学生自主探究和分析、解决问题的能力，培养学生合作交流的意识，丰富学生的数学活动经验。

三、新知巩固

教师课件出示习题供学生巩固新知：

① 如果一质点按 $s = 3t^2$ 的规律运动，那么在 $t = 2$ 时该质点的瞬时速度是多少？

② 若函数 $f(x) = x^3 + x^2 + 2$ 在 $x = 1$ 处可导，在运用导数定义求 $f'(1)$ 的过程中，设自变量的增量为 Δx，则函数的增量 Δy 等于多少？

【设计意图】课堂习题可以帮助学生进一步理解和记忆新知内容，使学生了解新知内容在解题中的应用。此外，新知巩固中的两道练习题，第一题为对瞬时变化率知识内容的巩固，第二题考查学生对于导数定义的理解。这一方面，帮助学生加深对导数定义的理解和掌握，另一方面，帮助教师了解学生对本课的掌握程度。

2019 年上半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力试题(高级中学)参考答案及解析

一、单项选择题

1.【答案】A。**解析**:有理数与有理数的和、差是有理数;有理数与无理数的和、差是无理数;无理数与无理数的和、差可能是有理数,如$(\pi+1)-\pi=1$,$(\pi+1)+(-\pi)=1$。故本题选 A。

2.【答案】B。**解析**:由$\begin{cases}x=a\cos^2 t,\\ y=a\sin^2 t,\\ z=a\sin 2t,\end{cases}$可得$x+y=a\cos^2 t+a\sin^2 t=a$,$z^2=a^2(2\sin t\cos t)^2=4xy$,所以将参数方程化成一般方程为$\begin{cases}x+y=a,\\ z^2=4xy。\end{cases}$故本题选 B。

3.【答案】D。**解析**:(方法一)设球坐标中任意一点$P(\rho,\theta,\varphi)$。根据题目中空间直角坐标与球坐标的变换公式可知,ρ 表示原点 O 与点 P 之间的径向距离,θ 表示 OP' 到 OP 的有向角,其中 OP' 是 OP 在 xOy 坐标面上的投影,φ 表示 Ox 轴到 OP' 的有向角,如图 1 所示。因此,$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 表示以原点为顶点,以射线 OP 为母线,以 z 轴为中心轴的半锥面,如图 2 所示。故本题选 D。

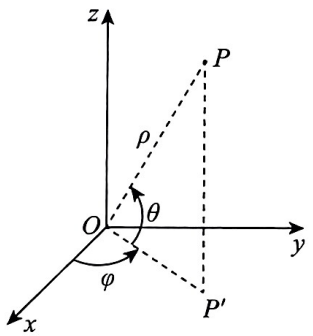


图 1

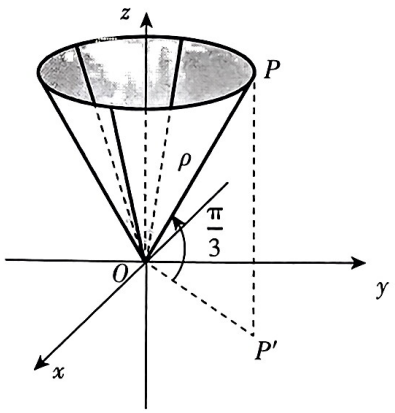


图 2

(方法二)将$\theta=\dfrac{\pi}{3}$代入到$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\cos\varphi,\\ y=\rho\cos\theta\sin\varphi,\\ z=\rho\sin\theta,\end{cases}$得$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\rho\cos\varphi,\\ y=\dfrac{1}{2}\rho\sin\varphi,\\ z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\rho,\end{cases}$消去参数整理得$z=\sqrt{3x^2+3y^2}$,该方程是由 yOz 平面上的射线$z=\sqrt{3}y(z>0)$绕 z 轴旋转得到的,它表示以原点为顶点,以射线$z=\sqrt{3}y(z>0)$为母线,以 z 轴为中心轴的半锥面。故本题选 D。

4.【答案】C。**解析**:若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作如下三种行(列)变换得到矩阵 $\boldsymbol{B}$:①互换矩阵的两行(列);②用一个非零数 k 乘矩阵的某一行(列);③把矩阵某一行(列)的 k 倍加到另一行(列)上。则对应行列式的关系依次为$|\boldsymbol{B}|=-|\boldsymbol{A}|$,$|\boldsymbol{B}|=k|\boldsymbol{A}|$,$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|$,所以若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经若干次初等变换得到矩阵 $\boldsymbol{B}$,则有$|\boldsymbol{B}|=k|\boldsymbol{A}|$,$k$ 是一个非零常数。因此,当$|\boldsymbol{A}|=0$时,一定有$|\boldsymbol{B}|=k|\boldsymbol{A}|=0$。故本题选 C。

5.【答案】B。**解析**:因为$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$,所以$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{(2n-1)!}(\pi x)^{2n-1}=\sin\pi x$,则$f(1)=\sin\pi=0$。故本题选 B。

6.【答案】C。解析:因为三阶矩阵A有三个线性无关的特征向量,且$\lambda=2$是A的二重特征根,所以齐次线性方程组$(2E-A)x=0$有两个线性无关的解向量,则$3-r(2E-A)=2$,$r(2E-A)=1$。因为$2E-A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-x&-2&-y\\3&3&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-1\\x&2&y\\0&0&0\end{bmatrix}$,所以要使$r(2E-A)=1$,则有$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}=\frac{-1}{y}$,即$x=2,y=-2$。故本题选C。

7.【答案】A。解析:直观想象是指借助几何直观和空间想象感知事物的形态与变化,利用空间形式特别是图形,理解和解决数学问题的素养。主要包括:借助空间形式认识事物的位置关系、形态变化与运动规律;利用图形描述、分析数学问题;建立形与数的联系,构建数学问题的直观模型,探索解决问题的思路。④中的描述属于数学建模素养。

8.【答案】A。解析:演绎推理是从一般规律出发,运用逻辑证明或数学运算,得出特殊事物应遵循的规律,即从一般到特殊的推理。归纳推理是由个别、特殊到一般的推理,通过实验验证结论和通过观察猜想得到结论的推理,都是归纳推理。故本题选A。

二、简答题

9.【参考答案】

(1)根据中位数的定义可知,甲组学生脱粒数量的中位数是$\frac{75+75}{2}=75$,乙组学生脱粒数量的中位数是$\frac{68+69}{2}=68.5$。

(2)①通过两组数据能够求出甲、乙两组学生脱粒数量的平均值$\bar{x}_{甲}=74.6$,$\bar{x}_{乙}=71.65$,根据平均数的大小比较可知,甲组脱玉米粒速度更快。

②根据两组数据的波动情况,能够看出甲组数据更为稳定,而乙组数据波动很大。进而可知,甲组学生的脱玉米粒能力差不多,而乙组学生脱玉米粒的能力存在很大的个体差异性。

10.【参考答案】

根据直线的方程可知,直线l_1的一个方向向量$s_1=\begin{vmatrix}i&j&k\\1&1&0\\1&2&1\end{vmatrix}=(1,-1,1)$,直线$l_2$的一个方向向量$s_2=(2,1,1)$。在$l_1$中令$y=0$,可得$l_1$过点$M_1=(-1,0,-1)$,又$l_2$过点$M_2(1,-1,0)$,$\overrightarrow{M_1M_2}=(2,-1,1)$。因为混合积$(s_1\times s_2)\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&1&1\\2&-1&1\end{vmatrix}=-2\neq0$,即向量$s_1,s_2,\overrightarrow{M_1M_2}$不共面,所以直线$l_1$与直线$l_2$异面。

直线l_1与直线l_2的公垂线的一个方向向量$l=s_1\times s_2=\begin{vmatrix}i&j&k\\1&-1&1\\2&1&1\end{vmatrix}=(-2,1,3)$,两直线之间的距离等于向量$\overrightarrow{M_1M_2}$在向量$l$方向上的投影的长度,即$d=\frac{|l\cdot\overrightarrow{M_1M_2}|}{|l|}=\frac{|-2|}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{14}}{7}$。

11.【参考答案】

(1)设该三次多项式函数的表达式为$f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$。根据题意,得$\begin{cases}a_0=1,\\a_3+a_2+a_1+a_0=3,\\-a_3+a_2-a_1+a_0=3,\\8a_3+4a_2+2a_1+a_0=15,\end{cases}$解得$a_3=1,a_2=2,a_1=-1,a_0=1$,所以$f(x)=x^3+2x^2-x+1$。

(2) 平面上 n 个不同的点所唯一确定的多项式函数的最高次数为 $n-1$。

设 n 个点满足的多项式函数为 $g(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$，显然对于 m 次多项式 $g(x)$，它具有 $m+1$ 个未知量 $a_i(i=0,1,2,\cdots,m)$，当这 $m+1$ 个未知量唯一确定时，多项式函数唯一确定。因为 n 个不同的点都是多项式函数上的点，所以把点的坐标代入多项式函数可得一个有 $m+1$ 个未知量、n 个不同方程的非齐次线性方程组，且其一定有解。

因为非齐次线性方程组一定有解，所以关于其解的情况只需对非齐次线性方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}_{n\times(m+1)}=\begin{bmatrix} x_1^m & x_1^{m-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^m & x_2^{m-1} & \cdots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_n^m & x_n^{m-1} & \cdots & x_n & 1 \end{bmatrix}$ 进行分析。

当 $m\leqslant n-1$ 时，根据范德蒙德行列式的性质，可知 $r(\boldsymbol{A})=m+1$（存在 $m+1$ 阶不等于 0 的子式，且 $r(\boldsymbol{A})\leqslant\min\{n,m+1\}=m+1$），此时系数矩阵的秩等于未知量的个数，非齐次线性方程组有唯一解，即唯一确定一个多项式函数 $g(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$。

当 $m>n-1$ 时，非齐次线性方程组方程的个数小于未知量的个数，此时非齐次线性方程组有无穷多解，不能唯一确定一个多项式函数。

综上，平面上 n 个不同的点所唯一确定的多项式函数的最高次数为 $n-1$。

12.【参考答案】

高中数学课程的基础性具有以下几点含义。

① 高中数学课程在课程内容上包含了数学中最基本的部分。在义务教育阶段之后，为满足给学生提供更高水平的数学基础的需求，面向全体学生提供了学生现阶段学习及未来发展所需要的数学基础知识，为学生的未来发展奠定基础。

② 高中数学课程为学生适应未来社会生活、高等教育和职业发展等提供必需的数学基础。例如，大学阶段理工科类的学生需要更多的数学知识，而高中数学课程为大学数学的学习提供了必备的基础知识。

③ 高中数学课程也为学生学习其他学科的课程，如高中物理、化学、技术等，提供了必要的知识准备。

13.【参考答案】

数学学习评价的形式多样，主要有口头测验、书面测验、开放式问题研究、活动报告、课堂观察、课后访谈、课内外作业、建立成长记录袋等。下面列举几种不同的评价方式进行阐述。（考场只需写四种）

① 口头测验，是指在教学过程中教师通过与学生之间的言语互动，及时地了解学生的数学学习情况，找出问题并及时纠正。

② 书面测验，是指教师对学生的作业或者其他测验报告所做的书面性的评价。这种评价方式可以帮助教师了解学生的数学学习状态以及知识掌握水平。

③ 书面评语评价，是指教师对学生的作业或者其他活动报告所做的书面性的评价，评分形式不仅仅是分数或者等级，评语一般以鼓励为主，用以帮助学生认识与解决问题。

④ 课后访谈，是指教师通过课后与学生的沟通交流了解学生数学学习情况的一种评价方式。这种评价方式可以帮助教师更直接地了解到学生的数学学习情况。

⑤ 建立成长记录袋，是指将学生的数学学习过程进行有效记录而形成的书面存档。这种评价方式既可以帮助教师随时了解学生数学学习的成长经历，也可以有效地帮助学生确立今后的学习目标与方向。

三、解答题

14.【参考答案】

(1) 证明:设 $P(x_P,y_P)$,$Q(x_Q,y_Q)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上任意的两点,则 $T(P) = T((x_P,y_P)) = \left(\frac{1}{2}x_P,\frac{1}{3}y_P\right)$,$T(Q) = T((x_Q,y_Q)) = \left(\frac{1}{2}x_Q,\frac{1}{3}y_Q\right)$。$d(T(P),T(Q)) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}x_P-\frac{1}{2}x_Q\right)^2+\left(\frac{1}{3}y_P-\frac{1}{3}y_Q\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}(x_P-x_Q)^2+\frac{1}{9}(y_P-y_Q)^2} \leqslant \sqrt{\frac{1}{4}(x_P-x_Q)^2+\frac{1}{4}(y_P-y_Q)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(x_P-x_Q)^2+(y_P-y_Q)^2} = \frac{1}{2}d(P,Q)$,即存在满足题意的 $\rho = \frac{1}{2}$,所以映射 T 是压缩映射。

(2)(方法一) 设 $O(0,0)$ 是二维欧氏空间 $\mathbf{R}^2$ 的原点。当 P_0 是原点时,有 $P_n = (0,0)$,$\forall n \in \mathbf{N}^*$,显然此时 $\{P_n\}$ 收敛,且 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n = (0,0) = O$。当 P_0 不是原点时,因为 $T(O) = O$,所以由(1)得,$d(P_n,O) \leqslant \frac{1}{2}d(P_{n-1},O)$,记 $d(P_0,O) = r > 0$,则有 $0 \leqslant d(P_n,O) \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n r$,因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n r = 0$,所以由夹逼定理,得 $\lim\limits_{n\to\infty}d(P_n,O) = 0$。根据点列极限定义可知,平面点列 $\{P_n\}$ 收敛于原点 O,即 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n = O$。

综上所述,平面点列 $\{P_n\}$ 收敛,且 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n = O$。

(方法二) 由于 $P_n = T(P_{n-1}) = T(T(P_{n-2})) = \cdots = T^n(P_0) = \left(\frac{1}{2^n}x_0,\frac{1}{3^n}y_0\right)$,因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}x_0 = 0$,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}y_0 = 0$,所以点列 $\{P_n\}$ 收敛,且 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n = (0,0)$。

四、论述题

15.【参考答案】

函数是中学数学课程的主线,它贯穿于整个中学数学课程中,方程、不等式、数列等内容均与函数有非常密切的联系。

(1) 函数与方程。中学数学课程中一元二次方程的求解问题,可以转化成求对应函数的零点问题。例如,求方程 $ax^2+bx+c = 0(a \neq 0)$ 的实数根,可以转化为求函数 $y = ax^2+bx+c$ 与 x 轴交点的横坐标的值,即求函数的零点问题。由此可以看出,方程可看作函数的局部性质,求方程的根就变成了思考函数图像与 x 轴的交点问题。利用函数的整体性质可以研究方程的根的性质,判断根的个数,并估计根所在的区间。

(2) 函数与不等式。用函数的观点看,不等式就是确定使函数图像 $y = f(x)$ 在 x 轴上方或下方的 x 的区域。中学数学课程中的一元二次不等式的求解问题,可以借助二次函数的图像找到不等式的解集。例如,求不等式 $x^2-3x+2 > 0$ 的解集,可以通过画出函数 $f(x) = x^2-3x+2$ 的图像找到使函数值大于0的所有 x 组成的集合,而这个集合就是该不等式的解集。

(3) 函数与数列。数列是一种特殊的函数,它的定义域为自然数集或自然数集的子集。数列是离散的函数,表现在坐标系中是一些离散的点的集合。中学数学课程主要涉及等差数列和等比数列,等差数列的通项公式是一次函数的离散化,等差数列的前 n 项和公式是二次函数的离散化,等比数列的通项公式以及前 n 项和公式都是指数函数的离散化,因此可以借助函数的性质来研究数列。例如,求等差数列的前 n 项和 $S_n = n^2-4n$ 在第几项取得最小值,可以将其转化为求函数 $f(x) = x^2-4x$ 的顶点横坐标问题,根据函数的顶点坐标公式可知,当 $x = 2$ 时,函数 $f(x)$ 取得最小值,即 S_n 在第2项取得最小值。

总之,在方程、不等式、数列等内容中,可以用函数思想去思考、解决问题,用函数的概念和性质去分析问题、转化问题和解决问题。

五、案例分析题

16.【参考答案】

(1) 课堂问题的设置应遵循的原则包括:有明确的目的性,有一定的启发性,有层次梯度,有一定的开放性。

教师A从概念的学习阶段开始,问题的目的性就不是很明确,如问题4和问题5,这种问题对学生理解函数零点的概念帮助不大;还有问题8和问题9,由于问题设置的太抽象,容易导致学生无法理解问题,无法实现教师设置该问题的目的。层次梯度的设置上也存在问题,如问题7,前面没有铺垫函数图像问题,问题跳跃性太强,不利于学生思考。

教师B提出的问题基本都有明确的目的,利用具体的函数提问,问题描述具体且准确,循序渐进引导学生一步一步地理解函数零点的概念和零点存在定理,且每个问题都具备一定的思维性,难度适宜,并在梯度设置上也是由易到难层层递进。

在问题的开放性上,两位老师做的都还不够,不利于创造性思维的培养。

(2) 教师A的概念引入部分的提问没有遵循循序渐进的原则,问题的设置要考虑学生的认知水平,问题的设置应该由浅入深,由易到难。

建议教师A应该先这样提问:同学们,在初中你是如何判断一个方程是否有实数根的?(回顾之前学过的方法)用初中的方法能判断方程 $\ln x + 2x - 6 = 0$ 是否有实数根吗?(引发学生的认知冲突)回顾一下初中的时候一元二次方程与对应的二次函数之间有什么关系呢?(引导学生思考方程和函数之间的关系)

教师B的概念引入虽然给出了三组实例,但还需在函数的类型上进行改进,不应该只呈现一元二次方程及其对应的二次函数,还可以增加一次方程及其对应函数让学生进行观察。

六、教学设计题

17.【参考答案】

(1)① 问题一:生活中,在检测某食品卫生达标情况时,食品卫生工作人员一般抽取部分该食品进行检测。你认为这种抽样方法科学吗?你还能举出生活中需要运用这种抽样方法的其他例子吗?

【设计意图】让学生初步了解生活中需要运用到统计方法的实例,可以使其了解简单随机抽样方法的价值。让学生举出其他生活实例,可以培养学生提出问题、发现问题的能力,并使其深切感受到随机抽样方法在解决实际问题中的重要性。

问题二:某校领导要了解全校学生的视力情况(近视和不近视),随机抽取50名学生,统计出这50名学生的视力情况,最后估计出全校学生的视力情况。你认为这种抽样方法有什么优缺点?在随机抽取的过程中应该注意什么?

【设计意图】该问题一方面可以使学生初步了解简单随机抽样这一抽样方法,并感受其实际意义;另一方面使学生自主探究简单随机抽样方法需要注意的问题,可以培养其发现问题和解决问题的能力。

② 实例:经消费者反映,某食品店小包装饼干存在细菌超标问题。针对该问题,食品卫生工作人员需要对该食品店小包装饼干进行卫生达标检验。但是,若食品卫生工作人员对该食品店所有小包装饼干进行逐一检测,将面临巨大的工作量。因此,食品卫生工作人员只能随机抽取该食品店部分饼干进行卫生检测。

【设计意图】将实际生活问题作为实例进行教学,不仅可以使学生对简单随机抽样方法有更深的理解,还可以使其感受在面对研究的总体数量较多时,简单随机抽样方法的重要性。

③ 师:在1936年美国总统选举前,某杂志工作人员做了一次民意测验,即调查兰顿和罗斯福谁将成为美国的下一届总统。该调查者通过电话簿和车辆登记簿上面的名单(只有少数富人拥有)给一大批人发了调查表,通过分析调查表数据,从而做出预测。

问题一:该杂志工作人员运用了什么抽样方法?研究的总体和样本分别是什么?该抽样方法具有什么特征?

【设计意图】结合生活实际描述问题情境并设置该问题,加深学生对简单随机抽样方法的理解,使其进一步明确简单随机抽样的特征,并巧妙地为后面问题做铺垫。

师：该杂志工作人员做出的预测是兰顿将在选举中获胜。但实际情况是，罗斯福在选举中获胜。

问题二：你知道该杂志的工作人员的预测为什么是错误的吗？分析该工作人员抽取的样本可以发现什么？该样本是否具有代表性？

【设计意图】颠覆性的结果，引出抽样问题。使学生自主思考和探究问题，可以培养学生独立思考的习惯以及发现问题的能力。

师：该抽样样本中涉及的调查者是富人阶层，只占所有选票中的少数。所以该工作人员所抽取的样本不具有代表性。

问题三：结合上述实例，在运用简单随机抽样方法抽取样本时，应该注意什么？除此之外，还应该注意什么？

【设计意图】通过实例使学生深刻理解样本是否具有代表性的重要性。此外，该问题进一步开拓了学生的思维，使学生自主思考在进行简单随机抽样时需要注意的事项。

(2)① 教学重点：让学生了解简单随机抽样方法的意义；理解简单随机抽样方法的定义；掌握简单随机抽样最常用的两种方法 —— 抽签法和随机数法；能够灵活选择抽样方法。

② 教学难点：学生初步接触“统计”内容，对于某些统计名词的理解不是很深刻；在运用简单随机抽样方法抽取样本的过程中，对需要注意的问题难以理解；面对统计数据时，学生难以判断所选取的抽样方法是否合适。

③ 简单随机抽样是学生高中阶段接触“统计”的第一个内容，统计知识的初步学习和统计思维的培养为后续教学相关内容奠定了重要基础。后续内容有其他抽样方法(系统抽样，分层抽样)，样本估计总体的相关内容，均涉及“总体”“样本”等概念，学生对这一内容的学习和掌握可以减轻学习后续内容的压力。学生在学习简单随机抽样的过程中感受其优缺点，可以为后续类比学习“系统抽样”“分层抽样”等抽样方法奠定重要基础；在学习运用“样本估计总体”的过程中均涉及统计方法，学生对简单抽样方法的学习可以为后续学习根据数据准确选取抽样方法的课程做铺垫。

2018年下半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力试题(高级中学)参考答案及解析

一、单项选择题

1.【答案】D。**解析:**平面的法向量是垂直于平面的非零向量。在空间直角坐标系中,与平面 $Ax+By+Cz+D=0(A,B,C$ 不同时为0)的法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 垂直的非零向量平行于该平面。经验证,向量 $\boldsymbol{a}=(2,3,1)$ 只与D项中平面的法向量 $(1,-1,1)$ 垂直。故本题选D。

2.【答案】B。**解析:**(方法一)当 $x\to 0$ 时,$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$,所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}$。

(方法二)本题可以用洛必达法则计算,$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}$。故本题选B。

3.【答案】D。**解析:**若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上(黎曼)可积,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有界(可积的必要条件)。故本题选D。

4.【答案】B。**解析:**(方法一)定积分 $\int_{-a}^{a}b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{d}x$ 表示被积函数 $y=b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$ 与 x 轴所围成的图形的面积,即椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在 x 轴上方部分的面积,而椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的面积为 πab,所以 $\int_{-a}^{a}b\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi ab}{2}$。

(方法二)本题也可以用第二换元积分法计算。令 $x=a\sin t,\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$,由于 $-a\leqslant x\leqslant a$,所以 $-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$,$\int_{-a}^{a}b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}b\cos t\cdot a\cos t\mathrm{d}t=ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t=ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2t+1}{2}\mathrm{d}t=\frac{ab}{2}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\mathrm{d}t+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}t\right)=\frac{\pi ab}{2}$。故本题选B。

5.【答案】C。**解析:**(方法一)若一个向量组中,一个向量可由其余向量线性表出,则这几个向量必线性相关;若一个向量组中,任意一个向量都不能被其余向量线性表出,则这几个向量必线性无关。本题中,若向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 与向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和向量 $\boldsymbol{\beta}$ 线性相关,则存在不同时为零的实数 x,y,使得 $\boldsymbol{\gamma}=x\boldsymbol{\alpha}+y\boldsymbol{\beta}=(x+y,y,x)$,经观察,A,B,D三项中的向量都能被 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 线性表出。故本题选C。

(方法二)向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}})$ 满秩 $\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|\neq 0$。依次验证四个选项所对应的矩阵的行列式是否等于零即可。下面以选项C为例进行计算,$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\1&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&-1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2\\-1&0\end{vmatrix}=2\neq 0$,所以向量 $(1,2,1)$ 与向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和向量 $\boldsymbol{\beta}$ 线性无关。故本题选C。

6.【答案】B。**解析:**由题意知,线性空间 V 中的每一个元素都是 $\cos x$ 和 $\sin x$ 的线性组合,而 $\cos x$ 和 $\sin x$ 是线性无关的,这是因为如果存在实数 m,n,使得 $m\cos x+n\sin x=0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都成立,则 $m=n=0$。因此,$\cos x$ 和 $\sin x$ 是线性空间 V 的一个基,所以 V 的维数是2。故本题选B。

7.【答案】C。**解析:**在课程标准中有两类课程目标行为动词,一类是描述结果目标的行为动词,包括“了解(知道)、理解、掌握、运用”等术语。另一类是描述过程目标的行为动词,包括“经历、体验、探索”等术语。每一组术语中按照从前到后的顺序要求递增,即行为动词按要求的高低排序为了解(知道)<理解<掌握<

运用，经历 < 体验 < 探索。故本题选 C。

8.【答案】A。解析：命题 P 的逆命题和命题 P 的否命题互为逆否命题，而互为逆否命题的两个命题同真同假。故本题选 A。

二、简答题

9.【参考答案】

函数 $f(x)$ 的一阶导数 $f'(x) = -3\sin x + 4\cos x$，令 $f'(x) = 0$，则有 $-3\sin x + 4\cos x = 0$，所以 $\tan x = \frac{4}{3}$。

因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且正切函数是周期为 π 的周期函数，所以使 $f'(x) = 0$ 的点为 $x = \arctan\frac{4}{3} + k\pi$，$k \in \mathbf{Z}$。

10.【参考答案】

因为 $|\boldsymbol{D}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$，所以 $\boldsymbol{D}$ 是一个可逆矩阵，因此 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$，即 $\begin{cases} x = -2x' + y', \\ y = 5x' - 2y', \end{cases}$ 将其代入 $xy = 1$，整理得 $10x'^2 - 9x'y' + 2y'^2 = -1$。

11.【参考答案】

当 $x_1 = x_2$ 时结论显然成立。当 $x_1 \neq x_2$ 时，不妨设 $x_1 < x_2$，因为 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的可导函数，所以 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上连续，在区间 (x_1, x_2) 上可导，由拉格朗日中值定理可得，存在一点 $\xi \in (x_1, x_2)$，使得 $f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2)$，即有 $|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)||x_1 - x_2|$。

因为 $f'(x)$ 有界，故存在 $M > 0$，对任意 $x \in [0,1]$ 都有 $|f'(x)| \leqslant M$，所以 $|f'(\xi)| \leqslant M$。故 $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant M|x_1 - x_2|$。

12.【参考答案】

日常数学教学中通过对学生学习的评价，教师可以更好地关注学生的学习过程，教师不仅能够关注到学生对知识技能掌握的程度，还可以关注到学生的思维过程。教师可以根据学生在学习过程中的表现判断学生是否会用数学的眼光观察世界，是否会用数学的思维思考世界，是否会用数学的语言表达世界。

日常数学教学中对学生学习过程中的表现、所取得的成绩以及所反映出的情感、态度、策略等方面的发展做出评价，其目的是激励学生学习，帮助学生有效调控自己的学习过程，使学生获得成就感，增强自信心，培养合作精神。

同时，通过对学生学习的评价，教师可以了解教学过程中存在的问题和需要改进的方向，及时修正和调整教学目标、内容和计划。

13.【参考答案】

基本不等式 $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}(a,b > 0)$ 的几何解释：

如图 1，AB 是圆 O 的直径，C 是 AB 上的一点，且 $AC = a$，$BC = b$，过点 C 作 AB 的垂线交圆于点 D，连接 AD，BD。易知 $\triangle ACD \backsim \triangle DCB$，所以 $CD^2 = AC \cdot BC$，即 $CD = \sqrt{ab}$。又 $OD = \frac{AB}{2} = \frac{a+b}{2}$。

根据几何图形知，$CD \leqslant OD$，当且仅当点 C 和圆心 O 重合，即 $AC = BC$ 时，有 $CD = OD$，如图 2 所示。所以有 $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$，当且仅当 $a = b$ 时等号成立。

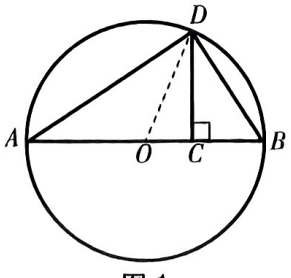


图 1

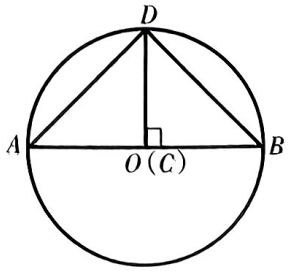


图 2

几何解释对学生数学学习的作用：

（1）有助于学生直观地理解数学问题。几何解释把复杂、抽象的数学问题变得简明、形象，可以帮助学生直观地理解数学问题，了解数学问题的几何背景或几何意义。

（2）有助于加深学生对定理、公式等数学知识的理解。在定理、公式的学习上，几何解释可以很好地帮助学生理解其本质含义，通过追本溯源，加深学生对定理、公式的记忆和把握。

（3）有助于激发学生的数学学习兴趣。运用几何解释来解决数学问题，可以将直观上枯燥、复杂的数学问题转化为形象、有趣的图形问题。这样可以避免学生对数学学习产生厌烦感，激发学生学习数学的兴趣，使其产生学好数学的信心。

（4）有助于探索解决问题的思路，预测结果。几何解释可以配合教师的启发式教学，帮助学生探索拓展解决问题的思路，引导学生多方向思考解决问题的途径，预测数学问题的结果。

（5）有助于培养数形结合的数学思想。教师在教学过程中通过几何解释渗透数形结合思想，帮助学生在数学学习的过程中逐步形成数形结合思想。

三、解答题

14.【参考答案】

因为 $0 \leqslant \xi \leqslant 1$，所以 $0 \leqslant \xi^2 \leqslant 1$。

当 $x < 0$ 时，$P(\xi^2 < x) = P(\xi^2 \leqslant x < 0) = 0$；

当 $x > 1$ 时，$P(\xi^2 < x) = 1$；

当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时，$P(\xi^2 < x) = P(-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}) = P(-\infty < \xi < \sqrt{x}) - P(-\infty < \xi < -\sqrt{x}) = P(-\infty < \xi < \sqrt{x}) = \sqrt{x}$。

所以 $P(\xi^2 < x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \sqrt{x}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, & x > 1。 \end{cases}$

四、论述题

15.【参考答案】

（1）信息技术在数学教学中的作用

① 信息技术可以为师生提供丰富的信息资源。教师将信息技术与数学教学相结合，利用丰富的数学教学资源，改变传统的学科教学内容，使教材“活”起来。学生通过信息技术进行辅助学习，把数学学习由课内延伸到课外，在开阔知识视野、丰富课余知识的同时，也培养了自主探究知识的能力。

② 利用信息技术可以优化数学课堂教学效果，提高教师的课堂教学效率。在数学教学的过程中运用信息技术，不仅可以使学生难懂、教师难教的数学知识变得简单化、形象化、直观化，还可以方便教师更好地突破知识的重难点，帮助学生对知识的优化和巩固。

③ 利用信息技术可以激发学生学习数学的兴趣。在信息技术的教学环境下，教学资源生动、丰富、有趣，教学信息的呈现方式多样、立体、丰富，面对如此众多的信息呈现形式学生表现出强烈的好奇心，很容易发展为兴趣。学生有了兴趣，就能主动、积极地投入学习和思考。

（2）信息技术与其他教学手段的关系

教师在教学时应将信息技术和其他教学手段相结合，取长补短，根据不同的教学特点、不同的内容合理地选用教学手段。信息技术并不能完全替代原有的教学手段，其真正价值在于实现原有教学手段难以达到，甚至达不到的效果。教师要从实际出发，适时、适量、适度和适龄地利用信息技术，在让信息技术真正为课堂服务的同时发挥其与常规教学手段的各自优势，相互促进、相辅相成。

五、案例分析题

16.【参考答案】

（1）与集合相关的知识点包括：① 元素与集合的概念；② 元素的确定性（即给定的集合，它的元素必须是

确定的)、互异性(一个给定集合的元素是互不相同的)和无序性;③集合相等的概念;④集合与元素的字母表示;⑤元素与集合的关系以及记法;⑥判断元素是否属于集合。

(2)设置思考2的主要目的是引导学生体会集合的“确定性”和“互异性”,进而更好地理解集合的含义。教材在思考2前讲述了在了解集合的含义时要考虑集合中元素的确定性和互异性。只有理解了集合的这两条性质才能够判断什么是集合,什么不是集合。思考2中描述的两类元素:“大于3小于11的偶数”满足这两条性质,能够组成集合;“我国的小河流”不满足这两条性质,不能组成集合。学生在思考2中充分体会这两条性质,可以对集合的含义有更为深刻的理解。

(3)集合在高中阶段的数学课程中具有十分重要的地位。集合是高中阶段数学课程引入的第一个概念,是整个高中数学课程内容的基础,集合的知识与后续内容的学习有着密切的联系。集合是学习、掌握、使用数学语言的基础,集合形象化地将生活实际问题用数学符号表示出来,从而简化了用数学分析实际问题的语言,为相关数学知识奠定一定的理论基础。许多重要的高中数学内容如函数、方程、不等式、立体几何、解析几何、概率统计等都需要用集合的语言来表述相关问题,集合对这些内容的后续学习均发挥了重要作用。

集合作为高中数学中基础且必需的数学语言,在高中数学课程中具有以下几点作用。

①培养学生运用数学语言学习数学、进行交流的能力。高中数学课程只将集合作为一种语言来学习,符合高中学生的认知水平。在此基础上,通过对集合知识的教学,很好地培养了学生用数学语言描述生活实例,交流实际问题的能力。

②为后续高中数学知识的学习奠定知识基础、提供分析问题的方法。集合语言具有简洁、明确的特性,并且可以清晰地表达事物之间的关系,为后续高中数学知识的学习奠定十分重要的语言基础。此外,集合知识可以很好地为师生提供分析问题的简便方法,如韦恩图(集合的表示法之一)可以直观清晰地表达事物之间的关系,在后续高中阶段概率统计内容的学习中,概率事件之间关系的分析就要用到韦恩图的内容来进行分析。

③帮助学生进行思维过渡,从而开始自主学习的体验。集合内容抽象程度较高,蕴含着丰富的数学思想,并且有其独特的符号和表达方法,对学生的理解能力有一定的要求。因此,集合作为高中数学课程的第一个内容,可以帮助刚进入高中阶段的学生进行思维过渡。学生以此为“跳板”,提高抽象思维能力,为后续数学内容的学习开启新的体验。

六、教学设计题

17.【参考答案】

(1)导入活动:利用多媒体播放一组学生课前收集的图片(旗杆与地面垂直、教学楼与地面垂直等),组织学生观察图片中事物之间的位置关系。

提出问题:利用所学的直线与平面垂直的定义观察旗杆与地面、教学楼与地面的位置关系是什么?

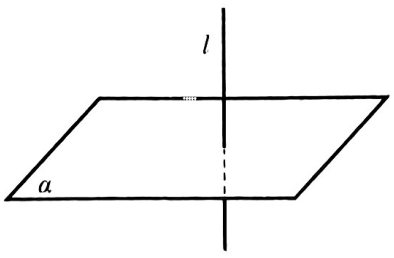
预设学生回答:垂直关系。

教师带领学生一起回忆直线与平面垂直的定义:如果一条直线与一个平面内的任意一条直线都垂直,就说这条直线与此平面互相垂直。

提出问题:你能否画出直线与平面垂直的几何图形?

预留时间供学生动手作图。

教师板书:

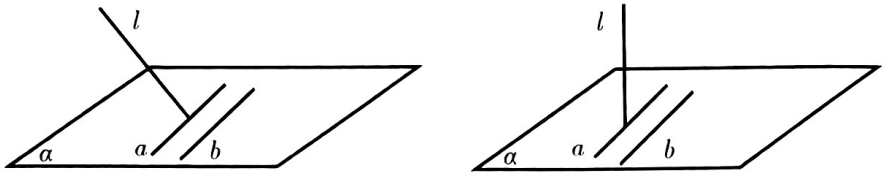


提出问题:①如果直线l与平面α内一条直线垂直,那么直线与平面是否垂直?

② 如果直线 l 与平面 α 内两条直线垂直，那么直线与平面是否垂直？

预留时间供学生思考交流，之后教师带领学生共同探究。

教师板书问题中相应的几何图形：



提出问题：直线 l 与平面 α 内的直线 a 垂直，直线与平面是否垂直？直线 a 与直线 b 平行，则直线 l 与直线 b 也垂直，即直线与平面内两条平行直线垂直时，直线与平面垂直吗？

预设：直线与平面内一条直线垂直时，直线与平面不一定垂直；直线与平面内两条平行直线垂直时，直线与平面也不一定垂直。

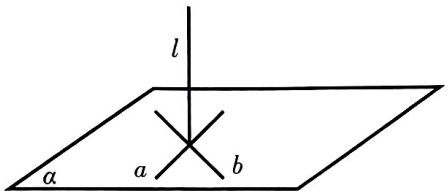
提出问题：两条直线除了平行还有什么位置关系？

预设：两条直线的位置关系还有相交。

提出问题：直线 l 与平面 α 内的两条相交直线垂直，直线与平面垂直吗？

预留时间供学生思考讨论。

教师板书几何图形：

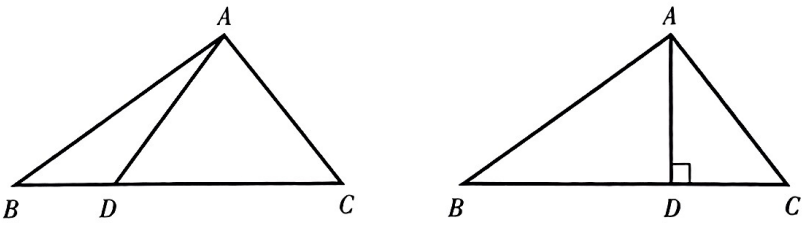


预设猜想：一条直线与一个平面内的两条相交直线垂直，则该直线与此平面垂直。

教师带领学生探究猜想。

教师：请同学们拿出准备好的一块（任意）三角形的纸片，我们一起来做一个实验。过 $\triangle ABC$ 的顶点 A 翻折纸片，得到折痕 AD，将翻折后的纸片竖起放在桌面上，（BD，DC 与桌面接触）。请同学们观察思考、动手实践探究折痕 AD 与桌面是否垂直？如何翻折才能使折痕 AD 与桌面所在的平面垂直？

学生自主探究之后教师板书：



提出问题：若 $AD \perp BC$，按照上述翻折之后可以得到什么？BD 与 CD 是什么关系？

预设：$AD \perp BD$，$AD \perp CD$，BD 与 CD 相交于点 D。

提出问题：大家观察此时折痕 AD 与桌面所在的平面垂直吗？

预留时间供学生观察感受。

教师总结：当 $AD \perp BD$，$AD \perp CD$ 时，AD 与桌面垂直。也就是，若一条直线与一个平面内的两条相交直线垂直，则该直线与此平面垂直。这就是直线与平面垂直的判定定理。

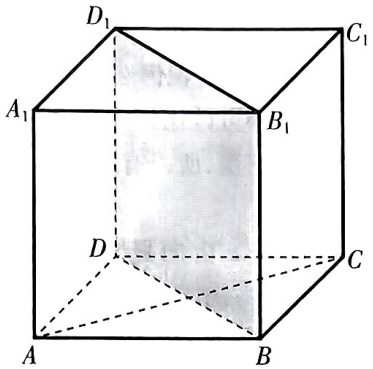
【设计意图】在教学中，充分发挥学生的主观能动性，先安排学生课前收集大量图片以感知数学与生活的联系，然后带领学生复习旧知，帮助学生建立起新旧知识之间的联系；通过学生动手画图、讨论交流和教师板书，使其经历从实际背景中抽象出几何概念的全过程，可以提高学生分析问题的能力；在教学过程中运用启发式层层设问，可以培养学生自主探究、独立思考的学习习惯；通过折纸实验引导学生分析猜想内容，使其形象化感知“直线与平面内两条相交直线垂直”，并以此为基础进行合情推理，进而验证猜想，这一过程符合学生思

维的认知过程。此外，通过几何直观分析定理内容，可以培养学生数形结合的数学思想。

（2）已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，

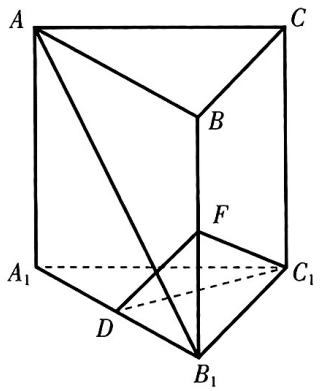
① 判断直线 AC 是否与平面 CC_1D_1D 垂直？直线 AC 是否与平面 BB_1D_1D 垂直？并说明理由。

② 你还能找出几组直线与平面垂直的关系？请分别列出并说明理由。



【设计意图】利用常见的正方体模型，创设问题情境组织学生利用已学定理进行判断证明，一方面，学生对于正方体各边的关系掌握得比较好，正方体中直线与平面的关系比较直观，此题可以帮助学生由浅入深地运用定理解决问题；另一方面，为加深学生对于定理的理解，题目不应拔高，此题目简单易懂可以很好地帮助学生加深对于定理的理解。

（3）如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC=1$，$AA_1=\sqrt{2}$，D 是 A_1B_1 的中点。



① 求证：$C_1D\perp$ 平面 AA_1B_1B；

② 当点 F 在 BB_1 上什么位置时，会使得 $AB_1\perp$ 平面 C_1DF？请说明理由。

【设计意图】本题分设两问，第一问既涉及直线与平面垂直的定义，又涉及直线与平面垂直的判定定理，将新旧知识很好地结合在一起，可以提高学生对于新旧知识之间联系的掌握程度；第二问换个角度考察直线与平面垂直的判定定理，即给出垂直关系找使其成立的条件，可以帮助学生进一步巩固新知内容，使其更加熟练地掌握并运用新知。

2018年上半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力试题(高级中学)参考答案及解析

一、单项选择题

1.【答案】D。**解析**:一个有理数乘另一个有理数的积仍然是有理数,所以有理数对于乘法运算是封闭的。有理数与数轴上的点一一对应,任何两个有理数都可以比较大小,结果可以是大于、等于或小于。实数集包括有理数集和无理数集,而实数集又是复数集的真子集,所以有理数集是实数集的子集,有理数集也是复数集的子集。

2.【答案】C。**解析**:向量积的定义,设向量 $\boldsymbol{c}$ 由向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 按如下方式确定:① 向量 $\boldsymbol{c}$ 的模 $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$,$\theta$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角;② 向量 $\boldsymbol{c}$ 的方向既垂直于向量 $\boldsymbol{a}$,又垂直于向量 $\boldsymbol{b}$,且其指向符合右手定则,则向量 $\boldsymbol{c}$ 叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积,记作 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$。根据向量积的定义,题干中的(1)(2)正确,(3)(4)错误。故本题选 C。

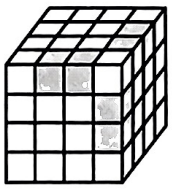
3.【答案】D。**解析**:根据微积分的知识,可导的函数必连续,所以 D 项正确。下面用函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}, x \in (0,1)$ 说明 A,B,C 三项都不正确。

函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上可导,但它在 $(0,1)$ 上是无界的,且没有最大值。下面证明函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上不是一致连续的。取 $\varepsilon_0 = 1$,令 $x_n' = \dfrac{1}{n}, x_n'' = \dfrac{1}{n+1}$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n' - x_n'') = 0$,且 $|f(x_n') - f(x_n'')| = 1 \geqslant \varepsilon_0$,所以 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续。

4.【答案】B。**解析**:n 个未知量的非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ 有解的充要条件是其系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于其增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的秩,并且当 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B}) = n$ 时,方程组有唯一解;当 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B}) < n$ 时,方程组有无穷多个解。

本题中,因为线性方程组 $\begin{cases} ax + by = u, \\ cx + dy = v \end{cases}$ 的系数矩阵 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 与增广矩阵 $\begin{bmatrix} a & b & u \\ c & d & v \end{bmatrix}$ 的秩均为 2,且等于未知量的个数,所以该线性方程组有唯一解。

5.【答案】A。**解析**:先求两个面涂为红色的小正方体个数。如图所示,每条棱上有 2 个小正方体有两面被涂成红色,共有 12 条棱,所以共有 24 个小正方体恰有两面涂成了红色,所求概率 $P = \dfrac{24}{64} = \dfrac{3}{8}$。



6.【答案】B。**解析**:抛物柱面 $y^2 = 2x$ 和平面 $x - y - 2 = 0$ 可看作是 xOy 平面内曲线 $y^2 = 2x$ 与直线 $x - y - 2 = 0$ 沿平行 z 轴方向平移得到的。联立 $y^2 = 2x$ 与 $x - y - 2 = 0$,消去 y 得 $x^2 - 6x + 4 = 0$,其中 $\Delta = 6^2 - 4 \times 4 \times 1 = 20 > 0$,故在 xOy 平面内曲线 $y^2 = 2x$ 与直线 $x - y - 2 = 0$ 的交是两个点。沿着平行于 z 轴的方向平移这两个点,就得到了两条平行直线,即抛物柱面 $y^2 = 2x$ 与平面 $x - y - 2 = 0$ 的交为平行于 z 轴的两条平行直线。

7.【答案】D。**解析**:"尺规作图三大问题"是指三等分角,即三等分任意角;立方倍积,即作一个立方体使之体积等于已知立方体体积的二倍;化圆为方,即作一个正方形使之面积等于已知圆的面积。

8.【答案】B。解析:平面向量是高中数学必修4学习的内容。风险与决策是选修4-9的内容,数列与差分是选修4-3的内容,矩阵与变换是选修4-2的内容。

二、简答题

9.【参考答案】

若矩阵A存在逆矩阵,则有$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$,故要求矩阵A的行列式$|A|\neq 0$,即$|A|=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc\neq 0$。

因为$A^*=\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$,所以$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\frac{1}{(ad-bc)}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$。

10.【参考答案】

令$F(x,y,z)=x^2-2y^2+z^2+xy+1$,则$F'_x(x,y,z)=2x+y$,$F'_y(x,y,z)=-4y+x$,$F'_z(x,y,z)=2z$,于是$F'_x(1,2,2)=4$,$F'_y(1,2,2)=-7$,$F'_z(1,2,2)=4$,从而过点$(1,2,2)$的切平面的法向量为$(4,-7,4)$。

11.【参考答案】

先证满射。对任意$g(x)=a\cos x+b\sin x\in V$,有$\int g(x)\mathrm{d}x=\int(a\cos x+b\sin x)\mathrm{d}x=a\sin x-b\cos x+C$,所以存在$f(x)=-b\cos x+a\sin x\in V$,使得$Df(x)=f'(x)=g(x)$,即$D$是$V$到$V$上的满射。

再证单射。设$f_1(x)=a_1\cos x+b_1\sin x$,$f_2(x)=a_2\cos x+b_2\sin x$,$a_1=a_2$和$b_1=b_2$不同时成立,即$f_1(x)\neq f_2(x)$,则$Df_1(x)-Df_2(x)=(a_2-a_1)\sin x-(b_2-b_1)\cos x=\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2}\sin(x-\varphi)$,这里$\varphi$满足$\cos\varphi=\frac{a_2-a_1}{\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2}}$,$\sin\varphi=\frac{b_2-b_1}{\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2}}$。由于$a_1=a_2$和$b_1=b_2$不同时成立,所以一定存在$x_0\in\mathbf{R}$,使得$Df_1(x_0)-Df_2(x_0)=\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2}\sin(x_0-\varphi)\neq 0$,从而$Df_1(x)\neq Df_2(x)$,即证得$D$是$V$到$V$上的单射。

综上所述,D是V到V上既单又满的映射。

12.【参考答案】

教学方法是教师引导学生掌握知识技能,获得身心发展而共同活动的方法。选择中学数学教学方法的依据:① 符合教学规律和教学原则;② 符合教学目标和任务;③ 符合教学内容的特点;④ 符合学生的发展水平;⑤ 符合教师的特长;⑥ 符合教学的经验性。

13.【参考答案】

“探索”是描述过程目标的行为动词,“掌握”是描述结果目标的行为动词,“探索并掌握两点间的距离公式”这一目标,对学生提出了两个层面的要求:一是要经历公式的探究过程,二是要理解并掌握公式。学生通过经历两点间距离公式的探究过程,可以增强运用已学知识解决问题的数学活动经验,很好地提升了数学推理等数学核心素养;学生掌握两点间距离公式,要能熟练地运用公式解决问题。

三、解答题

14.【参考答案】

由$f'(x)-3x^2f(x)=0$,整理得$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=3x^2f(x)$,分离变量得$\frac{\mathrm{d}f(x)}{f(x)}=3x^2\mathrm{d}x$,两边同时积分得$\int\frac{\mathrm{d}f(x)}{f(x)}=\int 3x^2\mathrm{d}x$,即$\ln f(x)=x^3+C$,故$f(x)=\mathrm{e}^{x^3+C}=C_1\mathrm{e}^{x^3}$,又$f(0)=C_1=1$,所以$f(x)=\mathrm{e}^{x^3}$。

四、论述题

15.【参考答案】

教学活动应努力使全体学生达到课程目标的基本要求,同时要关注学生的个体差异,促进每个学生在原有的基础上得到应有的发展。

对于学习有困难的学生,教师要给予及时的关注与帮助,鼓励他们主动参与数学学习活动,并尝试用自己的方式解决问题、发表自己的看法,要及时地肯定他们的点滴进步,耐心地引导他们分析产生困难或错误的原

因，并鼓励他们自己去改正，从而提高其学习数学的兴趣和信心。对于学有余力并对数学有兴趣的学生，教师要为他们提供足够的材料和思维空间，指导他们阅读，发展他们的数学才能。

在教学活动中，要鼓励与提倡解决问题策略的多样化，恰当评价学生在解决问题过程中所表现出的不同水平。问题情境的设计、教学过程的展开、练习的安排等要尽可能地让所有学生都能主动参与，提出各自解决问题的策略。引导学生在与他人的交流下选择合适的策略，丰富数学活动的经验，提高思维水平。

五、案例分析题

16.【参考答案】

(1) 我认为这位教师的教学处理有欠妥当。首先，教学活动是师生积极参与，交往互动，共同发展的过程。教师在提问了两名学生得到答案后就进行后续的教学，没有做到面向全体学生，违背了新课程改革中教育观的要求。其次，在两位同学回答后，只有结果性评价，没有过程性评价，不利于学生形成良好的学习习惯。最后，针对其中的错误答案，没有引导学生分析错误原因，没有很好地起到一个组织者、引导者以及合作者的作用。

(2)① 甲同学这种“找不全”的现象可能是对异面直线的概念理解不清。教师在日常教学过程中，应多运用这些概念，使学生在认识上获得巩固加深，培养和提高他们运用概念分析问题和解决问题的能力，从而形成新的认识结构。同时，要引导学生进行总结，从一个概念出发，把关联概念、派生概念串连成线，相互对比，既直观形象，又有利于发展学生的创造性思维。如本题中，教师可以把两条直线平行、相交、异面三种位置关系一同研究，相互对照，有利于学生对概念的掌握。

② 甲同学这种“找不全”的现象还可能是由于方法不得当，缺少条理性，导致遗漏。针对这一问题，用条件和结论的改变拓展学生的思维，对于某个类型的典型题目选择哪一种解法最佳，为什么要选择这种解题方法，要讲充分，让学生真正掌握。还要注重解题方法的比较、总结，只有这样学生才能进一步认识规律。如本题寻找异面直线的问题，可以转化为寻找共面直线，这样就大幅度地降低了本题的难度，有利于学生对该知识的理解。

六、教学设计题

17.【参考答案】

(1) 看一看以下式子，展开式是什么？有多少项？

$(a+b)^1=?$　$(a+b)^2=?$　$(a+b)^3=?$

根据以前的经验可得：

$(a+b)^1=a+b$；

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$；

$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$。

通过上面的等式，大家已经发现了一定的规律，展开式的首项和末项的系数均为1，中间项系数为其“肩上”的两个数字之和。

$(a+b)^1$　　1　1

$(a+b)^2$　　1　2　1

$(a+b)^3$　1　3　3　1

⋮　　⋮

$(a+b)^n$　　…

那么$(a+b)^n$是否也有这样的规律呢？你能准确写出这些项吗？（引出新课）

【设计意图】通过创设问题情境，从而有效激发学生的学习兴趣以及求知欲，有利于后续课堂的继续推进，另外在引导的过程中，先从简单的式子入手，再一步步深入，符合学生的认知发展规律，也为学生在后续推导$(a+b)^n$的过程提供一定的方法和依据。

(2) 推导二项式定理的基本步骤如下。

① 根据多项式乘法法则，得$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2=C_2^0a^2+C_2^1ab+C_2^2b^2$。

② 引导学生运用计数原理推导$(a+b)^2=C_2^0a^2+C_2^1ab+C_2^2b^2$。

推导思路如下：$(a+b)^2$是2个$(a+b)$相乘，根据多项式乘法法则，每个$(a+b)$在相乘时有两个选择，选a或选b，而且每个$(a+b)$中的a或b都选定后，才能得到展开式中的一项。于是由分步乘法计数原理，在合并同类项之前，$(a+b)^2$的展开式共有$2\times2=2^2$(项)，而且每一项都是$a^{2-k}\times b^k(k=0,1,2)$的形式。对于每一个$k(k\in\{0,1,2\})$对应的$a^{2-k}\times b^k$是由$2-k$个$(a+b)$中选$a$，$k$个$(a+b)$中选$b$得到的。由于$b$选定后，$a$的选法也随之确定，因此，$a^{2-k}\times b^k$出现的次数相当于从2个$(a+b)$中取$k$个$b$的组合数。所以，得到$(a+b)^2=C_2^0a^2+C_2^1ab+C_2^2b^2$。

③ 类比步骤②的推导思路，猜想$(a+b)^3$，$(a+b)^4$的展开式，并通过多项式乘法对猜想结果进行验证。

④ 类比步骤②和步骤③，猜想$(a+b)^n$的展开式。

通过上面几个步骤，猜想$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^nb^n$。

⑤ 对步骤④猜想的$(a+b)^n$的展开式进行验证。

类比步骤②中的推导思路。$(a+b)^n$是n个$(a+b)$相乘，根据多项式乘法法则，每个$(a+b)$在相乘时有两个选择，选a或选b，而且每个$(a+b)$中的a或b都选定后，才能得到展开式中的一项。于是由分步乘法计数原理，在合并同类项之前，$(a+b)^n$的展开式共有2^n项，而且每一项都是$a^{n-k}\times b^k(k=0,1,\cdots,n)$的形式。对于每一个$k(k\in\{0,1,\cdots,n\})$对应的$a^{n-k}\times b^k$是由$n-k$个$(a+b)$中选$a$，$k$个$(a+b)$中选$b$得到的。由于$b$选定后，$a$的选法也随之确定，所以$a^{n-k}\times b^k$出现的次数相当于从$n$个$(a+b)$中取$k$个$b$的组合数$C_n^k$。因此，验证了猜想：$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^nb^n$。

2017年下半年中小学教师资格考试
数学学科知识与教学能力试题(高级中学)参考答案与解析

一、单项选择题

1.【答案】D。**解析:**(方法一)对矩阵作初等行变换,得$\begin{bmatrix}0&1&2\\3&0&1\\-1&2&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1&2&0\\3&0&1\\0&1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1&2&0\\0&6&1\\0&1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1&2&0\\0&6&1\\0&0&11\end{bmatrix}$,所以矩阵$\begin{bmatrix}0&1&2\\3&0&1\\-1&2&0\end{bmatrix}$的秩为3。

(方法二)由于$\begin{vmatrix}0&1&2\\3&0&1\\-1&2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-6&1&0\\3&0&1\\-1&2&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-6&1\\-1&2\end{vmatrix}=11\neq0$,所以矩阵$\begin{bmatrix}0&1&2\\3&0&1\\-1&2&0\end{bmatrix}$满秩,即秩为3。

2.【答案】A。**解析:**若$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0,\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$,且$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$,则称$\alpha(x)$和$\beta(x)$是当$x\to x_0$的等价无穷小量。$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin(x-x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t}{t}=1$,所以当$x\to x_0$时,与$x-x_0$是等价无穷小的为$\sin(x-x_0)$。

3.【答案】D。**解析:**如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散,则称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$条件收敛。级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$为交错级数,根据莱布尼兹判别法可知此级数收敛,而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\dfrac{1}{n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$条件收敛。其他三个级数,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^2}$绝对收敛。

4.【答案】C。**解析:**① 错误,① 未强调此常数要大于两个定点之间的距离,正确的说法是平面内到两个定点的距离之和等于常数(大于两定点间的距离)的动点轨迹是椭圆。② 正确,“平面内到定直线的距离和定直线外一点距离之比大于1的常数的动点轨迹是椭圆”的说法等价于椭圆的第二定义:平面内到定点的距离和到定直线的距离之比是大于0且小于1的常数的动点轨迹是椭圆。③ 正确,这是椭圆的光学性质,即从椭圆的一个焦点发出的射线(光线),经椭圆反射后通过椭圆的另一个焦点。④ 错误,平面与圆柱面的截线有三种:a. 当平面与圆柱面的母线垂直时,截线是圆;b. 当平面与圆柱面的母线相交但不垂直时,截线是椭圆;c. 当平面与圆柱面的母线平行时,截线是一条直线或两条平行的直线。因此,题干中关于椭圆的论述正确的有2个。

5.【答案】B。**解析:**二次型正定的充要条件是它对应的矩阵的顺序主子式全大于零。对四个选项的二次型所对应的矩阵逐一验证即可。下面只给出B项中二次型的验证过程。

二次型$x_1^2+2x_1x_2-x_2x_3+5x_2^2+x_3^2$所对应的矩阵为$\begin{bmatrix}1&1&0\\1&5&-\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}$,其一阶顺序主子式$1>0$,二阶顺序主子式$\begin{vmatrix}1&1\\1&5\end{vmatrix}=5-1=4>0$,三阶顺序主子式$\begin{vmatrix}1&1&0\\1&5&-\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{2}&1\end{vmatrix}=\dfrac{15}{4}>0$,所以B项的多项式为正定二

次型。

6.【答案】B。**解析**:由于随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,$Y=2X-3$,则随机变量 $Y=2X-3$ 的均值为 $2\mu-3$,方差为 $4\sigma^2$,故 Y 服从的分布是 $N(2\mu-3,4\sigma^2)$。

7.【答案】A。**解析**:交叉关系,概念 a 和概念 b,如果有的 a 是 b,有的 a 不是 b,并且有的 b 是 a,有的 b 不是 a,那么 a 和 b 这两个概念之间就是交叉关系。题干中的“等差数列”和“等比数列”概念之间的关系是交叉关系,这是因为公比为 1 的等比数列也是公差为 0 的等差数列,且只有这一种情形下两个概念有交叉。

同一关系指两个概念间内涵不同、外延完全相同的关系。如“等边三角形”和“等腰三角形”

属种关系指一个概念的部分外延与另一个概念的全部外延重合的关系,其中,外延大的概念叫属概念,外延小的概念叫种概念。如“平行四边形”和“矩形”。

矛盾关系是在同一个属概念下的两个种概念的外延互相排斥,其相加之和等于该属概念的外延。如对实数这个属概念而言,有理数和无理数这两个概念之间的关系就是矛盾关系。

8.【答案】C。**解析**:集合是属于必修 1 的内容,三角函数、平面向量是属于必修 4 的内容,导数及其应用是属于选修 1-1 或选修 2-2 的内容,空间向量是属于选修 2-1 的内容。所以属于高中数学必修课程的内容有 3 个。

二、简答题

9.【参考答案】

(1) 由题意知,V_1 是由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 生成的子空间,V_2 是由 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 生成的子空间,V_3 是 V_1 与 V_2 中向量的线性组合,所以 V_3 就是由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 生成的子空间,从而 $\dim V_3=\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,又 $(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}})=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&1&-3\\1&4&2\end{bmatrix}\rightarrow$ $\begin{bmatrix}1&2&0\\0&-3&-3\\0&2&2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&0\\0&-3&-3\\0&0&0\end{bmatrix}$,所以 $\dim V_3=2$。

(2) 由(1) 中矩阵可知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 V_3 的一个基,所以对 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 进行施密特正交化,可令

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1),\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\left(\frac{2}{3},-\frac{5}{3},\frac{8}{3}\right),$$

对 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 单位化,可得 V_3 的一个标准正交基

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\left(\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6}\right),\boldsymbol{\gamma}_2=\left(\frac{2\sqrt{93}}{93},-\frac{5\sqrt{93}}{93},\frac{8\sqrt{93}}{93}\right)。$$

10.【参考答案】

设“参加某类职业资格考试的考生是本专业考生”为事件 A,“考生通过考试”为事件 B。结合题意知,$P(A)=0.6,P(\overline{A})=0.4,P(B\mid A)=0.85,P(B\mid\overline{A})=0.5$。进而根据贝叶斯公式可知,所求概率

$$P(A\mid B)=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})}=\frac{0.6\times0.85}{0.6\times0.85+0.4\times0.5}=\frac{51}{71}。$$

11.【参考答案】

设 $y=x+\xi$ 与该图形相交,将其面积分别分为 S_1 和 S_2。易知 S_2-S_1 是关于 ξ 的连续函数,记 $F_\xi=S_2(\xi)-S_1(\xi)$,可知 $F_{\max}=S$(S 为封闭曲线面积),$F_{\min}=-S$,由连续函数介值定理知,必存在实数 ζ,使 $F_\xi(\zeta)=0$,即 $S_2(\zeta)=S_1(\zeta)$,即直线 $y=x+\zeta$ 平分该图形的面积。

12.【参考答案】

平行四边形的定义:两组对边分别平行的四边形叫作平行四边形。它的定义方式是属加种差定义法,其中属概念是四边形,种差是两组对边分别平行。

实数的定义:有理数和无理数统称实数。它的定义方式是揭示外延定义法。

13.【参考答案】

向量的数量积运算与实数的乘法运算最明显的区别是向量的数量积运算不仅涉及向量的长度，还涉及向量的方向。向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的数量积为 $\boldsymbol{\alpha\beta} = |\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|\cos\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$。

向量的数量积运算与实数的乘法运算虽然在运算过程中均满足：交换律、分配律且运算结果均为实数，但实数的乘法运算满足消去律，向量的数量积则不满足消去律。在实数的乘法运算中，若 $a \neq 0$ 且 $ab = 0$，则 $b = 0$。但在向量的数量积运算中，若 $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{\alpha\beta} = 0$，则 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta}$。

三、解答题

14.【参考答案】

（1）由题意知，点 $P(1,3)$ 在椭圆上。椭圆方程左右两边对 x 求导，得 $\frac{2x}{4} + \frac{2yy'}{12} = 0$，即 $y' = -\frac{6x}{2y} = -\frac{3x}{y}$。将 $x = 1, y = 3$ 代入，得 $y' = -1$，所以切线方程为 $y = -x + 4$。该切线分别交 x 轴和 y 轴于点 A 和点 B，所以可得 $A(4,0), B(0,4)$。线段 AB 绕 x 轴旋转一周得旋转曲面 S，曲面 S 的方程为

$$\sqrt{y^2 + z^2} = -x + 4, 0 \leqslant x \leqslant 4。$$

（2）求曲面 S 与平面 $x = 0$ 所围成的立体的体积有两种方法：

① 利用旋转体体积公式有

$$V = \pi\int_0^4 (4-x)^2 \mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\pi(4-x)^3\Big|_0^4 = 0 - \left(-\frac{64\pi}{3}\right) = \frac{64\pi}{3}。$$

② 根据几何性质，线段 AB 绕 x 轴旋转一周得到的曲面和平面 $x = 0$ 所围成的立体是底面半径 $r = 4$，高 $h = 4$ 的圆锥体，根据圆锥的体积公式，得

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times 4^3 = \frac{64\pi}{3}。$$

四、论述题

15.【参考答案】

（1）数学文化是指数学的思想、精神、语言、方法、观点，以及它们的形成和发展，还包括数学在人类生活、科学技术、社会发展中的贡献和意义，以及与数学相关的人文活动。数学文化在数学教学中主要有两方面的含义：一是体现数学外部和内部联系的事物，如与数学知识相关的数学史、数学家、数学在日常生活中的应用等；二是蕴含于数学知识形成和应用过程中的意识形态和精神领域的因素，如数学思想、方法、精神、数学美等。

如何在教学中渗透数学文化，下面给出几条建议。

① 数学课堂教学要充分利用数学史、数学家的故事，渗透数学文化的人文教育价值。

在漫长的数学发展史中涌现出很多数学家的故事，通过这些数学家的故事，学生可以初步了解数学知识产生与发展的过程，体会数学对人类文明发展的作用，提高学习数学的兴趣，加深对数学的理解，感受数学家严谨的态度和锲而不舍的探索精神等。

② 数学教学要注重展现知识的发生发展过程，渗透数学文化的科学教育价值。

数学课堂上，通过向学生展现知识的发生、发展过程，让学生体会所蕴含的数学思想方法、数学思维、数学精神等，这样不仅可以获得知识本身，更重要的是通过知识获得的过程发展学生的能力。

③ 数学教学要注意挖掘生活中的数学教学素材，渗透数学文化的应用教育价值。

数学课堂教学中教师可以创设情境，把现实生活中遇到的一些现象或问题作为教学素材，让学生认识到数学就在身边，数学是有用的，引导学生学会用数学眼光观察世界，用数学思维思考世界，用数学语言表达世界。

（2）数学文化对学生数学学习的作用：数学文化在数学教育中有着重要的作用，如促进数学理解，改变学生的数学观，培养处理现实问题的思维等。

① 促进学生对数学的理解。

学生学习数学不仅仅是学习数学知识,更重要的是学习数学的精神、思想方法以及数学中所蕴含的人文因素,这样才能真正学会数学,理解数学的本质。而这一点,离不开数学文化的学习与熏陶。

② 激发学生的学习兴趣。

在教学中适当地对学生进行数学文化的渗透,如数学家的故事、数学问题的发现过程等,让原本抽象的知识有了温度,学生可以了解知识的来龙去脉,了解不同知识间的联系,从而减少学习数学的盲目,增强学习数学的兴趣。

③ 提高学生的数学素养,培养处理现实问题的思维。

在教学中渗透数学文化,可以使学生了解数学与社会发展之间的关系与相互作用,了解数学发生、发展的历史与规律,了解数学家如何发现、创造出数学知识和思想方法等,这些都可以培养并提高学生的数学素养,培养学生利用数学思想方法处理现实问题。

五、案例分析题

16.【参考答案】

(1) 教师甲引入片段的设计思路是温故知新,让学生回忆初中数系扩充的经过,类比得出高中遇到实数范围内解决不了的问题,也应该想到引入新数的方法来扩充数集,进而引入新课。这样做能够让学生通过复习旧知来获得解决问题的方法,对学生解决问题的能力有一定的提高。但该教师的设计方案有些缺乏趣味性。

教师乙采用引入数学史来导入新课。这种导入既丰富了教材中的素材,又丰富了教学内容,同时激发了学生的学习兴趣,调动了学生学习复数的积极性,引发了学生的数学思考。该方案促使学生认识数学,理解数学,最终学好数学,体会到数学来源于生活,并应用于生活。有利于激发学生的思维,使学习变成一个生动活泼的、主动的和富有个性的过程。

(2) 将复数的代数形式 $z = a + bi(a,b \in \mathbf{R})$ 表示成 $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 的形式叫作复数的三角表示法,其中 $|z| = r$,θ 为复数 z 的辐角。引进复数三角表示法的依据是复数的几何意义和三角函数的定义,它是数形结合的产物,有了它就可以借助三角函数知识处理复数的一些问题。

引入复数三角形式的一个重要的原因在于用三角形式进行乘除法、乘方、开方相对于代数形式较为简单。例如,两复数相乘等于它们的模相乘而辐角相加,形如 $z_1z_2 = [r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)] \cdot [r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)] = r_1r_2 \times [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$。

复数的三角表示法也为以后引入欧拉定理及统一指数和三角函数等更加深入的知识做好理论铺垫。

六、教学设计题

17.【参考答案】

(1) 实例:假设某地区有高中生8000人,初中生12 000人,小学生18 000人。此地区教育部为了了解本地区中小学生的近视情况及其形成原因,要从本地区的中小学生中抽取1% 的学生进行调查。你认为应当怎样抽取样本?

分层抽样的实施步骤如下:

① 根据已经掌握的信息,将总体分成互不相交的层;

② 根据总体中的个数 N 和样本容量 n 计算抽样比 $k = \frac{n}{N}$;

③ 确定第 i 层应该抽取的个体数目 $n_i = N_i \times k$(N_i 为第 i 层所包含的个体数),使得各 n_i 之和为 n;

④ 在各个层中,按步骤 ③ 中确定的数目在各层中随机抽取个体,合在一起得到容量为 n 的样本。

【设计意图】通过对实例的探究,引导学生体会:① 不同的年龄阶段,影响近视的因素是不一样的,简单的随机抽样不具有代表性,所以调查者应利用事先掌握好的各种信息对总体进行分层,这可以保证每一层一定有个体被抽到,从而使样本更具有代表性;② 对小学、初中、高中抽样个数的探究,体会含有个体多的层,样本从该层中取的个体数也应该多,这样的样本才更具有代表性。

在整个探究过程中,在对简单随机抽样和系统抽样了解的基础上,提升学生对分层抽样的理解,感受分层

抽样的必要性以及它的特点。

(2)① 简单随机抽样

优点:操作简单易行;

缺点:适合总体个数较少的情况,当总体个数较多时,操作不便。

适用范围:总体个数不多时。

② 系统抽样

优点:简单易行;当对总体结构有了一定的了解时,充分利用已有信息对总体中的个体进行排队后再抽样,可以提高抽样效率;当总体中的个体存在一种自然编号(如生产线上产品的质量监控)时,便于实行系统抽样法。

缺点:在不了解样本总体的情况下,所抽出的样本可能有一定的偏差。

适用范围:总体个数较多时。

③ 分层抽样

优点:根据总体几个部分的明显差异,按照比例进行样本抽取,样本的代表性高。

缺点:总体的几个部分差异不明显时,不适合使用分层抽样。分层抽样需要和简单随机抽样或系统抽样方法结合使用。

适用范围:当总体由差异明显的几个部分组成时,往往选用分层抽样的方法。